

**Devoir de Physique du Fin du 1^{er} Semestre
(Durée : 4 H)**

Instructions générales :

- Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction.
- Toute application numérique, qui ne comportera pas d'unité, ne donnera pas lieu à l'attribution de points.

PARTIE A : Mécanique des fluides (Les 3 parties I, II et III sont complètement indépendantes)

I. Mesure de vitesse d'écoulement par tube de Pitot

Un tube de Pitot, de diamètre $d = 1 \text{ cm}$ est plongé dans le fluide en écoulement dont on veut évaluer la vitesse locale U . Il possède deux ouvertures. L'une, située au point M , est parallèle à l'écoulement du fluide. L'autre, située au point N , est perpendiculaire à cet écoulement. Par construction du capteur, les points M et N ont quasiment la même altitude ($z_M = z_N$). Ces deux ouvertures sont reliées par un tube vertical contenant un liquide, statique, de masse volumique ρ_0 , de sorte que l'on puisse évaluer la différence de pression entre les points M et N , qui est une image de la vitesse U à déterminer. Les canaux du tube de Pitot sont remplis du fluide de masse volumique ρ (Figure 1).

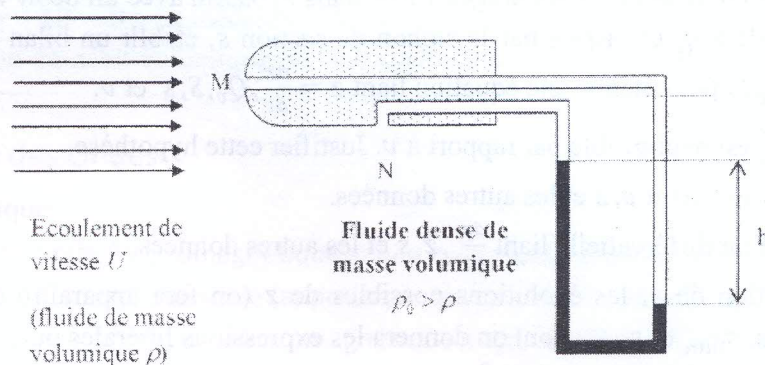


Figure 1

- 3- Rappeler l'équation de Bernoulli en précisant bien ses hypothèses d'application.
- 4- Que peut-on dire de la vitesse au point M , notée $v(M)$?
- 5- Quelle pression on mesure en M et en N ?
- 6- En assimilant l'air à un fluide parfait, en déduire la vitesse U de son écoulement en fonction de sa masse volumique ρ et de la différence de pression $\Delta P = P(M) - P(N)$ entre les points M et N .
- 7- Exprimer la différence de pression $\Delta P = P(M) - P(N)$ en fonction de h , ρ_0 , ρ et g .
- 8- En déduire l'expression de la vitesse U en fonction de h , ρ_0 , ρ et g .

II. Vidange par un siphon

Un bassin parallélépipédique de surface S et de hauteur H destiné à recueillir des eaux de ruissellement est enclavé entre une maison et une butte (Figure 2). En temps normal, l'écoulement des eaux est assuré par un drain placé à la base de ce bassin mais le drain se bouche et la fonte des neiges fait arriver de l'eau dans le bassin avec un débit volumique Q_v constant.

Pour évacuer ses eaux, on pose un siphon formé par un tuyau de section s plongeant dans le bassin et passant sur la butte, l'autre extrémité débouchant sur le flanc à la cote $z = 0$.

On opère le niveau d'eau dans le bassin par sa cote z et le sommet A par sa cote z_s . On détermine également, par rapport au fond du bassin, les hauteurs h_s du sommet et h_E de l'orifice d'entrée E .

Le siphon fonctionne de la manière suivante :

- Il s'amorce dès que le niveau d'eau arrive à la hauteur h_s ; l'écoulement de l'eau se produit alors et dure tant que le siphon ne se désamorce pas ;
- Dès que le niveau d'eau dans le bassin arrive à la hauteur h_E , de l'air pénètre dans le siphon ; il se désamorce et se vide alors complètement de toute l'eau qu'il contenait.

Les valeurs numériques sont : $z_s = 2,5 \text{ m}$; $h_s = 1,2 \text{ m}$; $h_E = 5 \text{ cm}$; $H = 80 \text{ cm}$; $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$; $S = 4 \text{ m}^2$;

masse volumique de l'eau : $\mu = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$;

débit volumique : $Q_v = 1,77 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

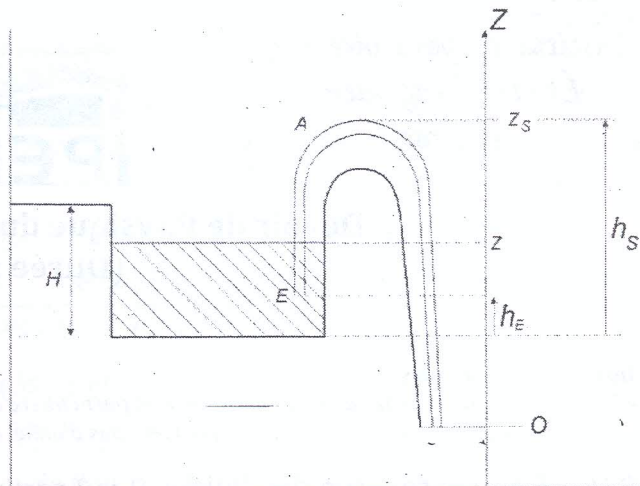


Figure 2

1- Exprimer, en fonction des grandeurs mesurées (H , z_s , h_E , h_s), les cotes z_F du fond du bassin, z_E du point E et z_H du niveau maximum d'eau dans le bassin. Faire l'application numérique.

2- On suppose le siphon initialement amorcé.

On appelle v la vitesse de l'eau à la sortie du siphon. L'eau sera considérée comme un fluide parfait, de masse volumique ρ . On négligera toute perte de charge.

a- En appliquant le théorème de Bernoulli, établir l'équation différentielle : $\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 = v^2 - 2gz$.

b- Étant donné que l'eau de la fonte des neiges arrive dans le bassin avec un débit volumique Q_v constant, et qu'un débit d'eau égale à q_v est aspiré par le siphon de section s , établir un bilan du volume d'eau dans le bassin ($V = S(z - z_F)$) pour établir une équation liant $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$, Q_v , S , s et v .

3- On suppose que $\frac{dz}{dt}$ est négligeable par rapport à v . Justifier cette hypothèse.

a- Trouver une loi simple liant v , z et les autres données.

b- En déduire l'équation différentielle liant $\frac{dz}{dt}$, z , s et les autres données.

c- Discuter, en fonction de s , les évolutions possibles de z (on fera apparaître deux valeurs limitant les domaines d'évolution, s_{min} et s_{max} , dont on donnera les expressions littérales puis les valeurs numériques).

4- On choisit un tuyau de section $s = 4 \text{ cm}^2$.

A la date $t = 0$, le bassin est rempli aux trois quarts et le siphon est amorcé.

a- Faire l'application numérique dans l'équation différentielle du 2.b puis la résoudre. En déduire une relation liant la date t et z .

On pourra se servir du résultat suivant : $\int \frac{dz}{\sqrt{z+a}} = 2\sqrt{z} + 2a [1 - \ln(a + \sqrt{z})]$

b- Calculer numériquement la durée de vidange pour $z = z_E$.

c- Que se passe-t-il ensuite ? Le siphon amorce-t-il automatiquement ?

III. Écoulement de Poiseuille

Un fluide incompressible de masse volumique ρ et de viscosité dynamique μ s'écoule en régime laminaire et stationnaire dans une conduite cylindre d'axe Oz ; de longueur L et de rayon R . On néglige la pesanteur. Du fait des symétries du problème, on cherche en coordonnées cylindriques un champ des vitesses et un champ de pression de la forme $\vec{v}(M) = v_z(r, z) \vec{u}_z$ et $p(M) = p(r, z)$. On donne pour un tel champ :

$$\text{div } \vec{v}(M) = \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{v}(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \vec{u}_z$$

1- Montrer que $v_z(r, z)$ ne dépend pas de z .

2- Monter que la pression ne dépend pas de r .

3- Monter que le champ des accélérations est nul. En déduire l'expression linéaire de l'équation de Navier-

Stokes : $\frac{dp}{dz} = \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = C$ où C est une constante inconnue. Expliciter C et $p(z)$.

4- En exploitant les conditions aux limites sur la paroi de la conduite, monter que :

$$v_z(r) = \frac{(p(0) - p(L))(R^2 - r^2)}{4\mu L}$$

5- En déduire la loi de Poiseuille, exprimant la différence des pressions $p(z=0) = p_1$ à l'entrée et $p(z=L) = p_2$ à la sortie de la conduite en fonction du débit volumique Q_v .

6- Établir une analogie entre la loi de Poiseuille établie par la question 6/ précédente et la loi d'Ohm pour un conducteur filiforme en électrocinétique. En déduire une résistance hydraulique $\mathcal{R}$ et l'exprimer en fonction de μ , R et L . Comparer l'influence du rayon R sur la résistance électrique dans la loi d'Ohm et sur la résistance hydraulique dans la loi de Poiseuille et commenter.

7- Le débit volumique du sang dans une artère de longueur $L = 1 \text{ m}$, de rayon $R = 0,5 \text{ cm}$ est $Q_v = 50 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$, sachant que la masse volumique du sang $\rho = 1060 \text{ kg m}^{-3}$ et sa viscosité dynamique $\mu = 4.10^{-3} \text{ Pl}$:

a- Vérifier que le régime d'écoulement est effectivement laminaire.

b- Calculer la perte de charge linéique $\varpi = \frac{p_1 - p_2}{L}$ dans cette artère. En déduire sa résistance hydraulique

$\mathcal{R}$. Commenter ce résultat sachant que le cœur maintient une différence de pression $\Delta p = 4$ centimètres de mercure, symbolisée par « 12 – 8 » en médecine. On rappelle que $1 \text{ bar} = 760 \text{ millimètres de mercure}$.

8- Retrouver l'expression du débit volumique par une analyse en ordre de grandeur de l'équation de Navier-Stokes.

PARTIE B : Physique des Ondes

I- Onde Electromagnétique

La lumière est une onde électromagnétique située dans le domaine visible du spectre.

1- La lumière émise par une source classique (appelée par la suite lumière naturelle) est-elle polarisée ?

2- Donner un exemple de source d'onde électromagnétique polarisée en précisant l'état de polarisation de l'onde émise.

3- Citer une situation expérimentale dans laquelle il est indispensable de considérer le caractère vectoriel de la lumière et non seulement une représentation scalaire.

4- Etats de polarisation des ondes électromagnétiques

On définit l'état de polarisation d'une onde électromagnétique à partir de l'évolution temporelle du vecteur champ électrique $\vec{E}(M, t)$ en un point M donné et à un instant t .

On considère une onde électromagnétique plane progressive monochromatique, qui se propage dans un milieu assimilé au vide suivant la direction (Oz) dans le sens des z croissants. Le champ électrique correspondant, s'écrit : $\vec{E}(M, t) = E_{0x} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x + E_{0y} \cos(\omega t - kz - \varphi) \vec{u}_y$.

E_{0x} et E_{0y} sont des réels positifs représentant les amplitudes des composantes du champ électrique suivant les directions (Ox) et (Oy) respectivement. ω est la pulsation de l'onde, k est le module du vecteur d'onde et φ constitue le déphasage entre les composantes du champ électrique supposé indépendant du temps.

4-1- Pour une valeur quelconque de φ , quel est l'état de polarisation de l'onde ?

4-2- A quelle(s) condition(s) l'onde a-t-elle une polarisation circulaire ? Préciser le cas d'une polarisation circulaire gauche et le cas d'une polarisation circulaire droite.

4-3- A quelle(s) condition(s) l'onde a-t-elle une polarisation rectiligne ?

4-4- Une lumière naturelle non polarisée est envoyée sur un polariseur supposé parfait (P) de direction de polarisation est de vecteur unitaire $\vec{u}_x$.

4-4-1- Quelle est la direction du champ électrique $\vec{E}_P(M, t)$ de l'onde transmise du polariseur (P) ?

Cette onde arrive sur un deuxième polariseur, noté (A) identique au premier, souvent appelé analyseur, dont la direction de polarisation $\vec{u}_A$ fait un angle θ avec l'axe (Ox) de vecteur unitaire $\vec{u}_x$.

4-4-2- Quelle est la direction du champ électrique $\vec{E}_A(M, t)$ de l'onde transmise à travers l'analyseur (A) ?

Donner l'expression du champ $\vec{E}_A(M, t)$.

4-4-3- On rappelle que la valeur moyenne de la densité de flux d'énergie électromagnétique qu'on appelle de même éclairement est de la forme : $I = \langle \vec{R}(M, t) \rangle = \varepsilon_0 c \langle \vec{E}^2(M, t) \rangle$.

En déduire la relation, appelée théorème de MALUS, liant l'éclairement lumineux transmis par l'analyseur I_A en fonction à celui transmis par le polariseur I_P et l'angle θ .

Une lame à retard est une lame mince à faces parallèles, d'épaisseur e , taillée dans un cristal uniaxe ayant des propriétés optiques anisotropes. Cette lame agit sur la polarisation d'une onde lumineuse. Sous incidence normale, la lame est caractérisée par deux indices de réfraction n_x si l'onde incidente est polarisée suivant (Ox), et n_y si elle est polarisée suivant (Oy). Les axes (Ox) et (Oy) sont appelés les axes neutres de la lame (figure 3).

Une onde plane monochromatique polarisée rectilignement suivant une direction de vecteur unitaire $\vec{u}$, faisant un angle α avec $\vec{u}_x$, arrive sur la lame sous incidence normale. L'origine O est prise au niveau de la première face de la lame. Le vecteur d'onde et la longueur d'onde dans le vide sont respectivement notés $\vec{k}$ et λ . Le champ électrique de l'onde pour $z < 0$ est noté : $\vec{E}(M, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}$.

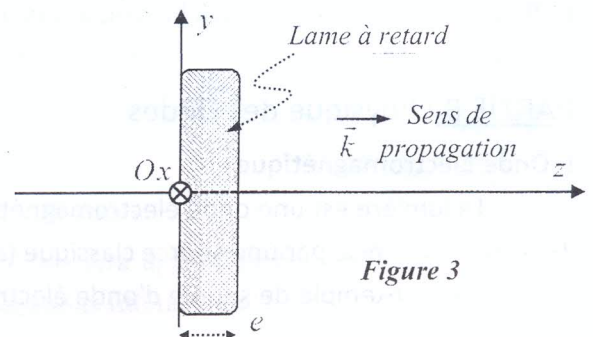


Figure 3

A la traversée des surfaces $z = 0$ et $z = e$, le champ électrique est continu.

5- L'onde incidente est polarisée selon $\vec{u}_x$ ($\alpha = 0$).

5-1- Etablir l'expression du champ électrique de l'onde pour $0 < z < e$. On exprimera la phase en fonction de ω , t , n_x , k et z .

5-2- Etablir l'expression du champ électrique de l'onde pour $z > e$.

5-3- L'onde incidente est maintenant supposée polarisée selon $\vec{u}_y$ ($\alpha = \frac{\pi}{2}$).

Donner les expressions du champ électrique de l'onde pour $0 < z < e$ et pour $z > e$.

6- On suppose maintenant que l'onde incidente est polarisée rectilignement dans le plan (O, x, y) selon une direction quelconque ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$).

6-1- Etablir l'expression du champ électrique de l'onde pour $z > e$.

6-2- Montrer que le déphasage φ de la composante orientée suivant $\vec{u}_x$ du champ électrique sur sa composante selon $\vec{u}_y$ est donné par : $\varphi = \frac{2\pi e(n_y - n_x)}{\lambda}$.

Distinguer sa valeur suivant qu'il s'agit d'une lame demi onde ou quart d'onde.

II- Onde mécanique

Un barreau solide cylindrique d'axe (Ox) , de section constante S , est constitué d'un matériau élastique de masse volumique ρ et de module d'Young E . Il est initialement immobile dans le référentiel d'étude $(\mathcal{R})$ supposé galiléen (figure 4).

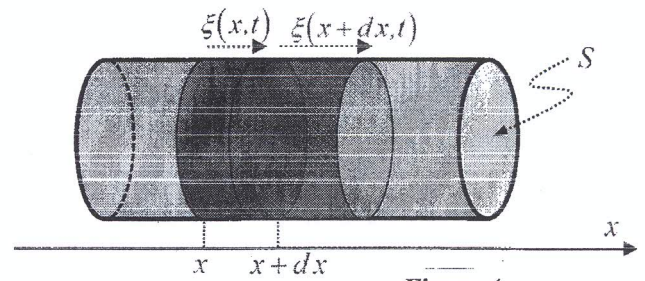


Figure 4

Une onde mécanique harmonique de longueur d'onde λ et de pulsation ω se manifeste par une déformation élastique longitudinale (compression - dilatation) se propageant à l'intérieur du barreau suivant la direction (Ox) . Dans une description mésoscopique, cette onde est décrite par champ scalaire représentant le déplacement $\xi(x,t)$ tel qu'une section du barreau, située à l'abscisse x en absence de l'onde, se trouve à l'abscisse $x+\xi(x,t)$ en présence de l'onde mécanique. Il en résulte qu'une tranche de la barre située entre les abscisses x et $x+dx$, au repos, se trouve entre les abscisses $x+\xi(x,t)$ et $x+dx+\xi(x+dx,t)$ en présence de l'onde.

1- Rappeler la loi de Hooke décrivant l'allongement élastique $\Delta L = L - L_0$ d'une barre métallique de longueur au repos L_0 , section S et soumise à une force de traction $\vec{F}$.

2- En absence de l'onde mécanique, une tranche élémentaire du barreau située entre les abscisses x et $x+dx$ possède le volume dV_0 . Lors du passage de l'onde, son volume devient dV . Déterminer les volumes élémentaires dV_0 et dV .

La dilatation volumique $\delta(x,t)$ de cette tranche est définie par le quotient : $\delta(x,t) = \frac{dV_0 - dV}{dV_0}$. Trouver

une relation entre $\delta(x,t)$ et $\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x}$.

3- Dans le cadre de la transition macroscopique-mésoscopique, montrer que la force de traction exercée sur la section S , située à la position x , de la part de la matière du coté droite à la section S , s'écrit :

$$\vec{F}_d(x,t) = ES \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x} \vec{u}_x. \text{ Préciser l'unité du module d'Young } E.$$

4- La matière constituant le barreau et située à gauche de cette section S exerce sur celle-ci une force de traction $\vec{F}_g(x,t)$. Trouver une relation entre les forces $\vec{F}_d$ et $\vec{F}_g$.

5- En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la tranche, située entre les abscisses x et $x+dx$ et de section S , montrer l'élongation longitudinale $\xi(x,t)$ obéit à l'équation de propagation D'Alembert. Exprimer la vitesse de propagation c de l'onde mécanique longitudinale dans le barreau en fonction des propriétés du matériau ρ et E .

6- Une onde mécanique harmonique, de pulsation ω , se propage à la vitesse c dans un barreau *infini* homogène cylindrique de section S et d'axe (Ox) . A chaque instant t et à une position d'abscisse x ,

l'élongation longitudinale, s'écrit : $\xi(x,t) = \xi_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)$, ξ_0 est l'amplitude maximale du déplacement de la tranche.

6-1- Exprimer les énergies cinétique dE_c et potentielle dE_p élémentaires associées à la tranche d'épaisseur dx en fonction des données : ξ_0 , ω , c , ρ , E , t et x .

Indication : on définit l'énergie potentielle élémentaire par : $dE_p = \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x} \right)^2 S dx$.

En déduire l'énergie mécanique linéique moyenne $\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle$ caractérisant le barreau excité par l'onde mécanique.

6-2- Déterminer la contrainte surfacique de traction $\bar{\sigma}(x,t) = \frac{1}{S} \bar{F}_d(x,t)$ que subit le barreau à une position d'abscisse x .

En déduire que $\bar{\sigma}(x,t)$ peut s'écrire sous la forme $\bar{\sigma}(x,t) = -\frac{E}{c} v(x,t) \bar{u}_x$, avec $v(x,t) = \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial t}$ représente la vitesse associée au déplacement $\xi(x,t)$.

7-1- Montrer que la densité de flux d'énergie ou puissance par unité de surface $\mathcal{P}_s$ transportée par l'onde mécanique au niveau d'une position d'abscisse x et à l'instant t s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{P}_s(x,t) = -\sigma(x,t) \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial t}.$$

Expliquer l'origine de la présence du signe (-). En déduire sa valeur moyenne temporelle $\langle \mathcal{P}_s(x,t) \rangle$.

7-2- Quelle relation existe-t-il entre la puissance mécanique moyenne $\langle \mathcal{P}(t) \rangle$ transférée à travers la section S et l'énergie mécanique linéique moyenne $\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle$? Commenter.

7-3- Calculer l'énergie mécanique linéique moyenne $\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle$ et puissance mécanique moyenne $\langle \mathcal{P}(t) \rangle$.

A.N : $\xi_0 = 10 \text{ nm}$, $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ MKSA}$, $\rho = 7800 \text{ kg m}^{-3}$, $S = 5 \text{ cm}^2$ et $f = 1 \text{ MHz}$.