



Devoir de Contrôle n°1

Durée : 1h 30mn

Epreuve : Analyse

Date : 31 Octobre 2023

Exercice

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$w_n = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{t}{t+n} dt \quad \text{et} \quad \gamma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n.$$

1. Montrer que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien définie et calculer sa valeur.
2. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} w_n$ est convergente. On note γ sa somme.
3. Exprimer $\sum_{k=1}^n w_k$ en fonction de γ_n et en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n = \gamma$.
4. Montrer que $\forall k \geq 2, \quad \frac{1}{2k(k+1)} \leq w_k \leq \frac{1}{2k(k-1)}$.
5. On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k$; $\forall n \geq 1$.

Montrer que : $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.

En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} R_n$.

Problème

1. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente.
On se propose de calculer la valeur de I .
2. (a) Montrer que : $\forall x \in]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leq x$.
(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, \sqrt{n}], \quad (1 - \frac{t^2}{n})^n \leq e^{-t^2} \leq (1 + \frac{t^2}{n})^{-n}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les suites $(u_n)_{n \geq 1}$, $(v_n)_{n \geq 1}$ et $(I_n)_{n \geq 1}$ par :
 $\forall n \geq 1, u_n = \int_0^{\sqrt{n}} (1 - \frac{t^2}{n})^n dt, \quad v_n = \int_0^{+\infty} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} dt \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt.$

- (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ justifier l'existence de l'intégrale v_n .
- (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq I_n \leq v_n$.
4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$.
- (a) Exprimer u_n en fonction de a_{2n+1} .
- (b) Montrer que : $\forall n \geq 1, v_n = \sqrt{n} a_{2n-2}$.
- (c) En admettant la formule ($a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$) déterminer la valeur de I .
5. (a) Déterminer les réels α pour les quels l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt$ converge.
- On note $J(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt$.
- (b) Montrer que $J(\alpha) = \alpha J(\alpha - 1), \forall \alpha > 0$.
- (c) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\pi}$.
- (d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} \frac{t^n e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$.

