



Devoir de Synthèse d'Analyse

Exercice:

Soit $C^0([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que les applications N_1, N_2 et N_∞ définies par:

$$N_1(f) = \int_a^b |f(t)| dt, \quad N_2(f) = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}, \quad N_\infty(f) = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|.$$

sont des normes sur $C^0([a, b], \mathbb{R})$.

2. Montrer que: $\forall f \in C^0([a, b], \mathbb{R}) \quad N_1(f) \leq \sqrt{b-a} N_2(f) \leq (b-a) N_\infty(f)$

PROBLEME

Partie I

On considère la fonction ζ définie par: $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

1. Déterminer D le domaine de définition de ζ .
2. Montrer que ζ est continue sur D .
3. Montrer que ζ est strictement décroissante sur D .
4. Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D .
5. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x)$.
6. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x)$.
7. Montrer que pour tout $x > 1$, on a :

$$\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq \frac{x}{x-1}.$$

8. En déduire un équivalent simple de $\zeta(x)$ au voisinage de 1^+ .
9. Retrouver alors $\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x)$.

Partie II

On considère la fonction g définie par: $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$ où $g_n(x) = \frac{x}{n} - \log(1 + \frac{x}{n})$.

1. Montrer que g est bien définie sur $] -1, +\infty[$.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, +\infty[$.
3. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, +\infty[$ et exprimer $g^{(k)}(x)$ sous forme d'une somme.
4. Montrer que: $g^{(k)}(0) = (-1)^k(k-1)!\zeta(k)$, $\forall k \geq 2$.
5. Soit la suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par: $\gamma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n$.

(a) Montrer que: $\gamma_{n+1} - \gamma_n = g_n(1) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Montrer que la suite γ_n est convergente et que sa limite γ vaut $g(1)$.

Partie III

On pose $f_k(x) = \frac{E(x)}{x^{k+1}}$ pour tout $k \geq 2$, avec $E(x)$ la partie entière du réel x .
On rappelle que ($\forall x \in \mathbb{R} \quad E(x) \leq x < E(x) + 1$).

1. Montrer que f_k est intégrable sur $[1, +\infty[$.
2. Calculer $U_n(k) = \int_n^{n+1} f_k(x) dx$, pour tout $n \geq 1$.
3. Montrer que $\int_1^{+\infty} f_k(x) dx = \frac{\zeta(k)}{k}$, pour tout $k \geq 1$.
4. Soient $V_k = \int_2^{+\infty} f_k(x) dx$ et V la somme de la série $\sum_{k \geq 2} (-1)^k V_k$.

(a) Montrer que la série $\sum_{k \geq 2} (-1)^k V_k$ est absolument convergente.

(b) Exprimer V_k en fonction de $\frac{\zeta(k)}{k}$, pour tout $k \geq 1$.

5. Soit h la fonction définie sur $[2, +\infty[$ par: $h(x) = \frac{E(x)}{x^2(1+x)}$.

(a) Montrer que h est intégrable sur $[2, +\infty[$.

(b) Montrer que $V = \int_2^{+\infty} h(x) dx$.

(c) Montrer que $\int_n^{n+1} h(x) dx = n(g_n(1) - g_{n+1}(1))$, pour tout $n \geq 1$.

(d) En déduire que $g(1) = V + \frac{1}{2} - \log\left(\frac{4}{3}\right)$.

