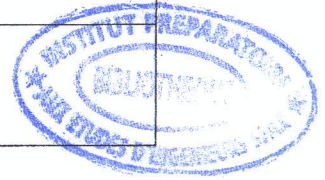


Devoir de Physique du Fin du 1^{er} Semestre
(Durée : 4 H)



Instructions générales :

- L'épreuve est constituée de deux parties A et B indépendantes qui seront rédigées sur des feuilles de composition séparées, et rendues également séparées à la fin de l'épreuve.
- Dans chaque problème, certaines parties et de nombreuses questions sont indépendantes. Un candidat peut toujours se servir d'un résultat fourni par l'énoncé pour continuer sa composition.
- On veillera à une présentation claire et soignée des copies. Il convient en particulier d'indiquer avec précision les références des questions

PARTIE A : Mécanique des fluides

I - Étude d'une hélice de ventilateur

On considère un ventilateur formé d'une hélice à plusieurs pales identiques de longueur L , tournant autour d'un axe horizontal (Ox) , immergé dans l'air, de masse volumique ρ , supposé parfait et incompressible, s'écoulant à la vitesse uniforme $\vec{v}_e = v_e \vec{e}_x$ et dans lequel règne une pression uniforme P_0 au voisinage de l'hélice. Nous proposons l'étude de l'écoulement de l'air en régime stationnaire dans le repère supposé galiléen, défini par l'axe de rotation de l'hélice, ce qui impose une vitesse angulaire de rotation $\vec{\Omega}$ constante de l'hélice. Comme le fluide est parfait, il existe une enveloppe, ayant une symétrie de révolution autour de (Ox) , qui sépare le fluide aspiré par l'hélice de celui circulant librement (Figure 1).

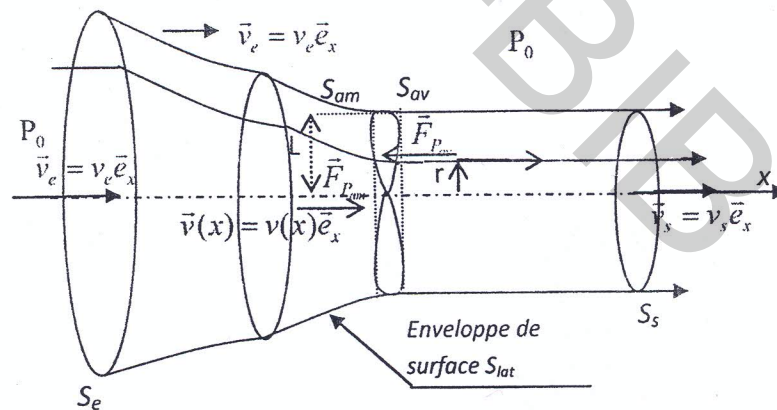


Figure 1: Modèle d'une hélice.

1. En appliquant le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant parallèle à (Ox) entre (S_e) et (S_{am}) d'une part et entre (S_{av}) et (S_s) d'autre part, calculer $P_{av} - P_{am}$ en fonction de $\rho, v_e, v_{am}, v_{av}, v_s$.
2. Appelons $\vec{F}$ la résultante des forces de contact exercées par l'hélice sur le fluide situé entre S_{am} et S_{av} . Etablir un bilan de quantité de mouvement dans le petit volume de contrôle de masse dm délimité par S_{am}, S_{av} et une partie de l'enveloppe du tube de courant à un instant t , formant ainsi un système fermé (S^*) .
3. En déduire l'expression de la résultante des forces de contact $\vec{F}$ en fonction de $\rho, P_{am}, S_{am}, v_{am}, P_{av}, S_{av}, v_{av}, Q_v$. Q_v étant le débit volumique de l'air dans le tube de courant.

4. Calculer S_{am} et S_{av} et en déduire l'expression finale : $\vec{F} = \pi L^2 \rho \frac{v_s^2 - v_e^2}{2} \vec{e}_x$

Commenter cette expression et conclure quant à l'accélération de l'air quand la force exercée par l'hélice est dirigée dans le sens de l'écoulement.

5. Etablir un bilan de quantité de mouvement dans l'ensemble du volume de contrôle délimité par S_e , S_s et la surface S_{lat} de l'enveloppe et déterminer $\vec{F}$.

6. En utilisant l'hypothèse incompressible, définir une composante de vitesse $v_h = v_{am} = v_{av}$ du champ des vitesses au niveau de l'hélice parallèle à Ox et montrer que :

$$v_h = \frac{v_s + v_e}{2}$$

7. Le fonctionnement de l'hélice est plutôt caractérisé par la puissance qu'elle transmet au fluide et qui est égale à $P_h = F \cdot v_h$ avec $\vec{F} = F \vec{e}_x$. A cause des pertes inévitables, la puissance P'_h que doit fournir le moteur à l'axe qui entraîne l'hélice est supérieure à P_h , le rendement $\eta = \frac{P_h}{P'_h}$ est généralement de l'ordre de 0,6.

En faisant les changements nécessaires montrer que l'on peut écrire :

$$Q_v = \pi L^2 \frac{P_h}{F} \text{ et } v_s = 2 \frac{P_h}{F} - v_e$$

Commenter ces des résultats et conclure sur l'effet des caractéristiques de l'hélice du ventilateur sur l'écoulement de l'air aspiré.

II - Étude d'un viscosimètre de Couette

Un fluide visqueux, de viscosité dynamique μ , incompressible, de masse volumique ρ , remplit, sur une hauteur h , l'espace entre deux cylindres C_1 et C_2 coaxiaux, d'axe commun vertical Oz et de rayons respectifs R_1 et R_2 (Figure 2).

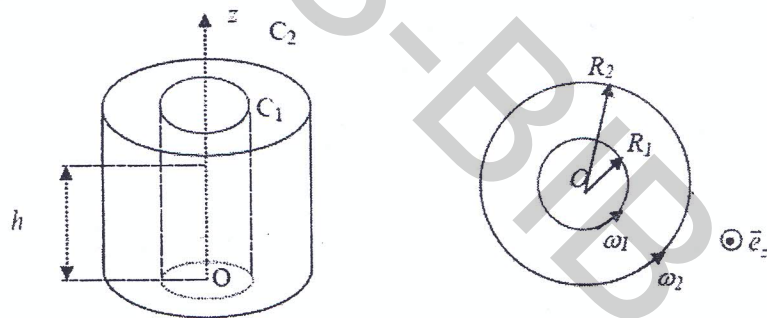


Figure 2 : Viscosimètre de Couette

On désire étudier le régime stationnaire où les vitesses respectives de rotation, par rapport à Oz , des deux cylindres sont ω_1 et ω_2 . Un point M du fluide est repéré par ses coordonnées cylindriques r, θ et z .

Nous admettons les hypothèses suivantes :

- le champ des vitesses dans le fluide est de la forme : $\vec{V} = V(r) \vec{e}_\theta$,
- le champ des pressions dépend de r et de z : $P = P(r, z)$,
- on néglige les effets de bord (h très grand devant R_1 et R_2).

II.1. Étude du champ des vitesses

1- Montrer que lorsque $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$, l'écoulement est rotationnel (le fluide tourne en bloc). Déterminer son vecteur tourbillon. En déduire l'expression du champ des vitesses.

2- Montrer que lorsque $\omega_2 = 0$ et $R_2 \rightarrow \infty$ le champ de vitesse s'écrit sous la forme : $V(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r}$.

Exprimer la constante Γ à partir des conditions aux limites. En déduire que l'écoulement est irrotationnel pour $r > R_1$. (le champ correspond à un vortex d'axe Oz).

3- On admet une solution du problème posé de la forme : $V(r) = Ar + \frac{B}{r}$ où A et B étant des fonctions de R_1, R_2, ω_1 et ω_2 .

3.1- Discuter les valeurs de A et B dans les conditions des questions 1 et 2.

3.2- En utilisant la **condition aux limites sur la vitesse du fluide visqueux par rapport aux parois** des deux cylindres, calculer les valeurs de A et B . En déduire l'expression de $V(r)$.

4- On s'intéresse à une tranche de fluide située entre les cylindres de rayon r et $r+dr$. On admet que les contraintes visqueuses s'exerçant sur la surface du fluide cylindrique de rayon r sont ici réductibles à des

forces de densité surfacique : $\frac{d\vec{F}}{dS} = \mu \left[\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r} \right] \vec{e}_\theta$.

4.1- Commenter cette expression dans les conditions des questions 1 et 2.

4.2- En écrivant le théorème du moment cinétique, projeté suivant l'axe Oz , pour un élément de fluide de hauteur Δz contenu entre r et $r+dr$ en **écoulement stationnaire**, montrer que l'équation différentielle

vérifiée par le champ de vitesses $V(r)$ s'écrit sous la forme : $\frac{d}{dr} \left[r^3 \frac{d}{dr} \left(\frac{V}{r} \right) \right] = 0$.

En déduire, l'expression : $V(r) = Ar + \frac{B}{r}$.



II.2. Mesure de la viscosité

Le cylindre C_2 tourne avec la vitesse angulaire $\omega_2 = \omega_0 > 0$ autour de Oz et le cylindre C_1 est immobile ($\omega_1 = 0$). Un tel dispositif peut être utilisé pour réaliser des mesures de la viscosité dynamique μ des liquides (Viscosimètre de Couette pour les fluides newtoniens). On suppose que ω_0 reste suffisamment faible pour que le régime de l'écoulement soit laminaire. La méthode de mesure consiste à déterminer le couple $\vec{\Gamma}_{op} = \Gamma_{op} \vec{e}_z$ qu'il faut appliquer sur le cylindre C_1 de rayon R_1 pour le maintenir fixe.

1- Calculer le moment Γ_1 des forces visqueuses s'exerçant sur le cylindre C_1 . En déduire la valeur du couple $\vec{\Gamma}_{op}$ en fonction h, R_1, R_2, ω_0 et μ .

2- Proposer une méthode expérimentale utilisant ce dispositif pour mesurer la viscosité dynamique μ d'un liquide.

On rappelle les expressions des opérateurs mathématiques en coordonnées cylindriques :

$$\overline{\text{grad}}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z ; \Delta\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \quad \text{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} ;$$

PARTIE B : Physique des Ondes

On donne : $\overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}}\vec{A}) = \overline{\text{grad}}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$.

I- Ondes mécaniques dans les solides

On considère un échantillon parallélépipédique de section S , de longueur au repos L et de masse volumique ρ , considérée constante dans tout l'échantillon. Pour caractériser l'élasticité de l'échantillon, on lui applique à ses extrémités une force de traction ou une compression $\vec{F}$. On notera σ la force par unité de surface que l'on applique, appelée contrainte dans la suite. La longueur initiale de l'échantillon passe de L à $L + \Delta L$ quand ce dernier est soumis à la force $\vec{F}$ (voir figure 3).

Tant que le matériau est sollicité dans son domaine d'élasticité, ce que l'on considère dans la suite, la variation relative de longueur est proportionnelle à la force surfacique appliquée, selon l'expression suivante donnée par la loi de Hooke pour la déformation d'un solide, $\sigma = \frac{F}{S} = E \frac{\Delta L}{L}$ (1)

avec E le module de Young du matériau, caractérisant son élasticité.

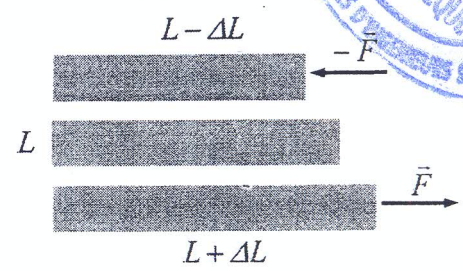


Figure 3

- 1- A quoi consiste la notion de l'élasticité d'un échantillon solide. En faisant une analyse dimensionnelle, déterminer l'unité du module de Young.
- 2- Pour un matériau très rigide, donner un ordre de grandeur une valeur de E .

On s'intéresse maintenant à la propagation d'ondes mécaniques de compression-dilatation dans ce même échantillon solide. Le système étudié (figure 4) est une tranche de solide délimitée par les plans perpendiculaires à l'axe (Ox), d'abscisses x et $x+dx$. Cette tranche est supposée au repos en l'absence du passage d'une onde mécanique. On note $\vec{u}(x,t) = u(x,t)\vec{u}_x$ le champ de déplacement dans le matériau, à l'abscisse x et à l'instant t , la déformation du matériau pour le point d'abscisse x , initialement au repos. Ce champ est unidirectionnel et la déformation est réalisée selon l'axe (Ox). Au passage d'une onde mécanique, à l'instant t , la tranche de solide se déforme, de telle sorte que le plan situé à l'abscisse x au repos est déplacé à l'abscisse $x+u(x,t)$ et celui situé en $x+dx$ est déplacé en $x+dx+u(x+dx,t)$.

Pour toutes ces déformations, on suppose que : $\left| \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right| \ll 1$ pour toutes les positions x et à chaque instant t .

La force par unité de surface (contrainte) est positive dans la direction des x croissants.

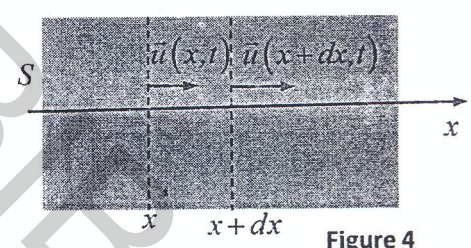


Figure 4

- 3- Exprimer la variation relative du volume $\delta(x,t) = \frac{dV - dV_0}{dV_0}$ d'une tranche de solide située entre x et $x+dx$ en fonction du champ de déplacement $u(x,t)$.
 - 4- Montrer que : $\frac{1}{S} \frac{\partial F(x,t)}{\partial x} = E \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$.
 - 5- Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la tranche $[x, x+dx]$ du solide et établir de l'équation décrivant l'onde mécanique, $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0$, (2)
- où c_s est une célérité, dont on donnera l'expression en fonction de ρ et E . Donner le nom de cette équation.
- 6- Évaluer numériquement la célérité c_s pour le granite.
 - 7- Rappeler la distinction entre une onde longitudinale et une onde transversale. En déduire si le champ de déplacement, dans la configuration précédente, décrit une onde longitudinale ou transversale.

8- Montrer que l'équation de propagation précédente (2) est compatible avec la conservation de l'énergie mécanique volumique, décrite par l'équation suivante,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(E \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right). \quad (3)$$

Indication : Pour établir cette équation, on pourra multiplier l'équation du mouvement (2)

par $\frac{\partial u}{\partial t}$ et utiliser l'expression $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right)$.

Reconnaître les termes d'énergie volumique potentielle élastique, d'énergie volumique cinétique et le vecteur de Poynting décrivant la propagation unidirectionnelle du flux d'énergie mécanique d'onde de déformation, en justifiant brièvement.

II- Ondes électromagnétiques dans un plasma

Un satellite d'observation de la Terre situé au-delà de l'ionosphère envoie des ondes radar à travers l'ionosphère.

L'ionosphère, couche de l'atmosphère située à plus de 60 km d'altitude, peut être considérée comme un plasma : c'est un milieu ionisé eu dense, caractérisé par une densité volumique d'électrons libres de charge $(-e)$, de masse m_e , égale à $n_1 = 10^{11} m^{-3}$ et une densité volumique de cations de charge $(+e)$, de masse m_c , égale aussi à n_1 , l'ensemble est donc globalement neutre. La valeur de la densité n_1 est supposée constante.

On se propose d'étudier dans ce milieu la propagation d'ondes du type $\vec{E}(M,t) = E_0 \vec{u}_y \exp j(\omega t - \underline{k}x)$.

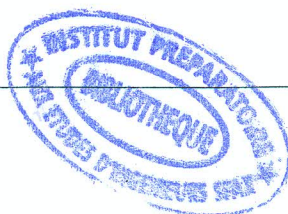
Où E_0 est un réel positif non nul et $\underline{k}$ est le nombre d'onde à priori complexe. On pose $\underline{k} = k_1 - jk_2$, avec k_1 et k_2 sont réels ; si $k_1 \neq 0$, alors on choisira $k_1 > 0$.

Dans le plasma, les électrons et les ions sont soumis à la force de Lorentz due aux champs électrique et magnétique de l'onde. On négligera l'effet de la pesanteur et les interactions entre particules chargées, et on supposera que les particules sont non relativistes (c-à-d leurs vitesses sont très petites devant la célérité de la lumière dans le vide c).

1- En admettant que le rapport $\frac{\omega}{|\underline{k}|}$ est de l'ordre de c , montrer que les effets de la partie magnétique de la force de Lorentz sont négligeables devant les effets de la partie électrique de la force de Lorentz.

2- En régime établi, et en supposant que l'amplitude des déplacements des charges reste petite devant la longueur d'onde, déterminer l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}_e$ (dans le référentiel galiléen d'étude) d'un électron, positionné en M à l'instant t , en fonction de m_e , e , ω et $\vec{E}(M,t)$. Donner l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}_c$ d'un cation. En déduire l'expression de la conductivité électrique complexe du plasma $\underline{\gamma}$ telle que le plasma vérifie la loi d'Ohm : $\vec{J}(M,t) = \underline{\gamma} \vec{E}(M,t)$, où $\vec{J}(M,t)$ est le vecteur densité volumique de courant complexe. En tenant compte des valeurs numériques, montrer que

$$\underline{\gamma} = \underline{\gamma}(\omega) = -j \frac{n_1 e^2}{m_e \omega}.$$



- 3- Calculer la puissance volumique moyenne $\langle \epsilon_v \rangle$ fournie par le champ électromagnétique aux électrons libres. Commenter.
- 4- Etablir l'équation de propagation de l'onde électromagnétique dans le plasma.
- 5- Etablir l'expression de k^2 dans le plasma. Mettre en évidence une pulsation caractéristique dite pulsation plasma ω_p ; donner son expression et calculer sa valeur numérique pour l'ionosphère. Calculer la longueur d'onde λ_p associée. A quel domaine du spectre électromagnétique appartient cette longueur d'onde ?
- 6- On se place dans le cas $\omega < \omega_p$, donner l'expression de k en fonction de ω_p , ω et c (on prendra $k_z > 0$). Donner les expressions des champs réels $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$. Caractériser l'onde obtenue. Donner l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(M,t)$ ainsi que sa valeur moyenne $\langle \vec{\Pi}(M,t) \rangle$ dans le plasma.
- 7- On se place dans le cas $\omega_p < \omega$, donner l'expression de k en fonction de ω_p , ω et c . Commenter. Donner les expressions de $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$. Caractériser l'onde obtenue (donner 5 qualificatifs). Donner l'expression de $\langle \vec{\Pi}(M,t) \rangle$. Déterminer l'expression de la vitesse de phase v_ϕ de cette onde en fonction de ω_p , ω et c . Le milieu est-il dispersif (justifier la réponse) ? Calculer la vitesse de groupe v_g en fonction de ω_p , ω et c . Donner la signification physique de cette vitesse. Comparer v_ϕ et v_g à la célérité c . Que penser du fait que v_ϕ puisse être supérieure à c ?
- 8- Un satellite d'observation de la Terre envoie des ondes radar à travers l'ionosphère à la fréquence $f = 13,6 \text{ GHz}$, ce choix de fréquence vous semble-t-il correct ?

Données numériques :

Masse du proton : $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, Permittivité diélectrique du vide : $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$
 Masse d'électron : $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$
 Charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$.

III- Ondes acoustiques sphériques

Onde acoustique sphérique progressive

L'air est un fluide homogène en équilibre est caractérisé par, sa masse volumique ρ_0 , la pression P_0 et le coefficient de compressibilité isentropique χ_s . On néglige les effets de pesanteur et on se place dans le cadre de l'approximation acoustique.

On s'intéresse à la propagation d'une onde sonore à symétrie sphérique : les champs, décrivant l'écoulement d'air en présence de l'onde, $p_1(M,t)$, $\rho_1(M,t)$ et $\vec{v}(M,t)$ ne dépendent que de la distance radiale r , séparant le point de détection M du point origine fixe O et du temps t .

Le laplacien d'une fonction scalaire $f(r,t)$ en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\Delta f(r,t) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f(r,t)).$$

- 1- Ecrire l'équation de propagation vérifiée par la surpression acoustique $p_1(M,t)$. Préciser l'expression la vitesse de propagation c_a de cette onde en fonction de ρ_0 et χ_s .

2- Déterminer l'expression générale de la surpression $p_1(M, t)$. Interpréter.

On étudie dans la suite une onde sphérique divergente harmonique dont la surpression acoustique, en notation complexe, est de la forme : $\underline{p}_1(M, t) = \frac{p_0}{r} \exp j(\omega t - kr)$

3- Montrer que le champ des vitesses $\vec{v}(r, t)$ s'écrit comme la somme de deux termes. Justifier la dénomination de *champ proche* et *champ lointain* et examiner leur contribution à l'intensité I de l'onde. Estimer la limite entre les deux champs.

4- Exprimer l'impédance complexe $\underline{Z} = \frac{p_1(r, t)}{v(r, t)}$ d'une telle onde en fonction de ρ_0 , c_a et le produit kr . Commenter.

5- La source de cette onde est une petite sphère pulsante de rayon moyen a_0 effectue un petit mouvement radial harmonique selon la loi : $a(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t)$, avec $a_0 \gg a_1$.

Exprimer p_0 en fonction de a_0 , ω et a_1 puis la puissance d'émission sonore $\mathcal{P}$ de la sphère pulsante en fonction des données a_0 , ω et a_1 entre autres. Les sources de petite taille sont-elles adaptées à produire des sons graves ?

6- *Application numérique* : Calculer l'amplitude a_1 avec laquelle doit vibrer une membrane de haut-parleur en forme de calotte sphérique de rayon $a_0 = 5 \text{ cm}$ pour produire un son grave de fréquence $f = 50 \text{ Hz}$ et de forte intensité $I(\text{dB}) = 90 \text{ dB}$ où la détection est faite à une distance $r = 1 \text{ m}$. Commenter.

Onde acoustique sphérique stationnaire

La source de l'onde acoustique sphérique est placée dans une cavité sphérique rigide de même origine O et de rayon R .

On cherche à étudier les modes propres de vibrations à l'intérieur de cette sphère rigide. la surpression acoustique, en notation complexe, s'écrit sous la forme :

$$\underline{p}_1(M, t) = \frac{\underline{A}}{r} \exp j(\omega t - kr) + \frac{\underline{B}}{r} \exp j(\omega t + kr), \text{ où } \underline{A}, \underline{B} \text{ et sont des constantes}$$

7- Justifier l'expression de la surpression $\underline{p}_1(M, t)$ et déterminer l'expression complexe du champ de vitesses $\vec{v}(r, t)$ en tout point de l'air à l'intérieur de la sphère rigide.

8- A quelle condition aux limites doit obéir le champ de vitesses au centre de la sphère ? En déduire alors une relation entre les deux constantes $\underline{A}$ et $\underline{B}$.

9- Que vaut la vitesse du fluide au voisinage immédiat de la paroi de la sphère rigide ?

En déduire la relation $\tan\left(\frac{\omega R}{c_a}\right) = \frac{\omega R}{c_a}$. Commenter.

10- Donner une valeur approchée de la plus basse de ces pulsations. Effectuer l'application numérique pour $R = 0,5 \text{ m}$.

