

Devoir de contrôle n° 2 Epreuve d'algèbre

Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes de degré inférieure ou égal à n . On définit sur $E \times E$ l'application suivante:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (P, Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt.$$

1. Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

On notera $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire et on pose $F = \{P \in E, P(0) = 0\}$.

2. Montrer que F est un hyperplan de E .

3. Soit $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ l'orthonormalisée de Schmidt de la base $(1, X, \dots, X^n)$ de E .

(a) Vérifier que pour tout entier $0 \leq k \leq n$, les polynômes P_k et P'_k sont orthogonaux.

(b) En déduire que pour tout entier $0 \leq k \leq n$, on a $(P_k(0))^2 = \|P_k\|^2 = 1$.

(c) Soit $S \in F^\perp$ un polynôme non nul. Montrer qu'on a alors:

i. $S = \langle 1, S \rangle \cdot \sum_{k=0}^n P_k(0)P_k,$

ii. $\|S\|^2 = (n+1)^2 \langle 1, S \rangle^2.$

4. Soit $\mathfrak{p}_F$ la projection orthogonale sur F et $\mathfrak{s}_F$ la symétrie orthogonale par rapport à F .

(a) Montrer que $\mathfrak{p}_F$ est un endomorphisme symétrique de E .

(b) Montrer que $\mathfrak{s}_F$ est un endomorphisme orthogonal de E .

(c) Montrer que $\forall P \in E, \mathfrak{p}_F(P) = P - \frac{\langle P, S \rangle}{\|S\|^2} S.$

5. Soit d la distance associée à la norme $\|\cdot\|$ et le polynôme constant $T(X) = 1$.

(a) Montrer que $d(T, F) = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$

(b) Trouver alors $d(T, F^\perp).$

Problème

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et par E_n le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à n . On pourra identifier un polynôme P avec la fonction polynômiale de E associée.

On définit pour tout $x \in [-1, 1]$ une suite de fonctions $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arccos} x).$$

Partie I

1. Calculer T_0 , T_1 et T_2 .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, T_n est un polynôme de degré n et a la même parité que n .
4. Calculer $T_n(1)$ et $T_n(-1)$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que la famille $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une base de E_n .
6. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.
7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \dots, n-1\}$, on note par $\theta_k = \frac{2k+1}{2n} \pi$ et $x_k = \cos(\theta_k)$.
Montrer que x_k est une racine de T_n . En déduire toutes les racines de T_n et justifier qu'elles sont toutes dans $[-1, 1]$.
8. Montrer que $\cos(nx) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k C_n^{2k} (\cos x)^{n-2k} (1 - \cos^2 x)^k$,
où $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ désigne la partie entière de $\frac{n}{2}$.
9. En déduire que $T_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k C_n^{2k} x^{n-2k} (1 - x^2)^k$.
10. Montrer que le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} , si $n \geq 1$.

Partie II

1. Montrer que l'application de $E_n \times E_n$ définie par

$$(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

est un produit scalaire sur E_n .

2. Vérifier que pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$,

$$\langle T_k, T_\ell \rangle = \int_0^\pi \cos(k\theta) \cos(\ell\theta) d\theta.$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que la famille de fonctions $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une base orthogonale de l'espace vectoriel E_n . Calculer la norme de chaque polynôme T_k .
4. Montrer que pour tout polynôme Q tel que $\deg(Q) < n$, on a $\langle T_n, Q \rangle = 0$.

Partie III

On définit l'application Φ sur E_n par :

$$\forall P \in E_n, \quad \Phi(P)(x) = (1 - x^2)P''(x) - xP'(x).$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E_n .
2. (a) Ecrire A la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ de E_n .
(b) Dédire que Φ est diagonalisable.
3. Montrer que $\forall P, Q \in E_n$,

$$\langle \Phi(P), Q \rangle = \langle P, \Phi(Q) \rangle.$$

(Ind. on pourra remarquer que $\Phi(P)(x) = \sqrt{1 - x^2} (\sqrt{1 - x^2} P'(x))'$).

4. Montrer que deux vecteurs propres de Φ associés à deux valeurs propres différentes sont orthogonaux.
5. On suppose que $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Soit $k \in \{0, \dots, n - 1\}$. Montrer que $\langle \Phi(T_n), T_k \rangle = 0$.

(b) En écrivant le polynôme $\Phi(T_n)$ dans la base $(T_0, \dots, T_n)$ de E_n , montrer que

$$\Phi(T_n) = \lambda_n T_n.$$

avec $\lambda_n \in \mathbb{R}$.

- (c) Calculer le coefficient dominant de $\Phi(T_n)$ puis déduire que $\Phi(T_n) + n^2 T_n = 0$.
- (d) En déduire que E_n admet une base orthonormale formée par des vecteurs propres de Φ .