

Devoir de Synthèse de Physique N° 02
(Durée : 4 H)

Instructions générales :

- Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
- Tous les résultats demandés seront exprimés littéralement à l'aide des données, puis numériquement.
- Toute application numérique, qui ne comportera pas d'unité, ne donnera pas lieu à attribution de points.

Partie I :

A. Diffusion de particules

Au sein d'un milieu homogène, considérons un ensemble de particules dont la concentration n'est pas uniforme. Ces particules peuvent être des molécules, des atomes ou des ions, des défauts ponctuels, des électrons libres, etc ... Dans l'hypothèse d'une diffusion unidirectionnelle, leur densité (ou concentration) particulaire $n(x, t)$ dépend de leur position le long de la direction Ox . En 1885, dans le cadre de ses travaux, *Adolf Fick* proposa la loi phénoménologique de diffusion. Cette loi introduit le coefficient de diffusion (ou diffusivité) D et relie le vecteur densité volumique de particules J au gradient de concentration particulaire n .

1. Citer la loi physique sur laquelle, à votre avis, *Fick* s'est appuyé pour élaborer sa théorie.
2. Rappeler la loi de *Fick* ; expliquer le caractère « phénoménologique » de cette loi. Justifier l'existence d'un flux de particules et son orientation relative vis à vis du gradient de concentration. La loi de *Fick* ne faisant apparaître que les variations spatiales de la concentration particulaire à un instant t , il convient de la compléter par une équation de bilan lorsque le flux de particules varie au cours du temps. Considérons un cylindre infiniment long, de section S constante, parallèle à la direction Ox de la diffusion.
3. Effectuer un bilan de matière sur un volume élémentaire de section S et d'épaisseur dx pour établir une relation traduisant la conservation du nombre de particules. En déduire l'équation de la diffusion :

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2}$$

4. Par une analyse dimensionnelle, établir une relation qualitative exprimant la longueur caractéristique L du phénomène de diffusion en fonction de l'ordre de grandeur τ de sa durée et du coefficient de diffusion D .

B. Conduction thermique

Considérons un tube cylindrique d'axe Oz , de rayon intérieur R_1 , de rayon extérieur R_2 et de très grande longueur (figure 1). Le tube est réalisé par un matériau de conductivité thermique λ .

5. Dans le cas général, rappeler la loi de *Fourier* qui relie le vecteur densité de courant thermique $\vec{j}_Q$ au gradient de température. Interpréter la conductivité thermique, telle qu'elle apparaît dans la loi de *Fourier*, et donner son unité.

6. Le système est en régime permanent : la température $T(r)$ en un point M du tube ne dépend donc que de r , la distance de M à l'axe (en coordonnées cylindriques). Les températures de surface sont notées $T_1 = T(R_1)$ et $T_2 = T(R_2)$. Préciser la direction du vecteur $\vec{j}_Q$ dans le tube.

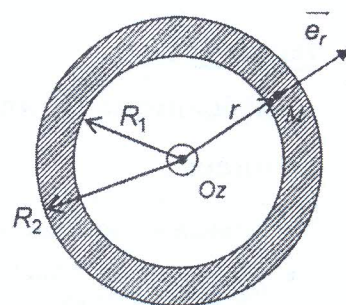


Figure 1

7. Exprimer la puissance thermique P_{th} sortant d'un cylindre de rayon r ($R_1 < r < R_2$) et de longueur L , en fonction de $\vec{j}_Q(r)$ et de r .
8. En appliquant le premier principe de la thermodynamique à un système correctement choisi, montrer que la puissance thermique P_{th} est indépendante de r .
9. En déduire l'expression de la température $T(r)$ en fonction de P_{th} , r , R_1 , λ , T_1 et L .
10. Établir que la puissance thermique s'écrit : $P_{th} = g L (T_1 - T_2)$. Exprimer g en fonction de λ , R_1 et R_2 .
11. Calculer g pour un tube ayant les caractéristiques : $\lambda = 0,4 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-1} \text{K}^{-1}$, $R_1 = 8 \text{ mm}$ et $R_2 = 8,5 \text{ mm}$.

C. Rayonnement Thermique

On propose d'étudier dans cette partie le transfert de la chaleur par rayonnement entre le soleil et la terre.

12. Rappeler la définition d'un corps noir.
13. Rappeler la loi de Wien, liant la longueur d'onde λ_m du maximum d'émission du corps noir à sa température T . Calculer λ_m et préciser son domaine spectral dans les deux cas :
 - Surface terrestre à $T_T = 300 \text{ K}$.
 - Surface du soleil à $T_S = 5800 \text{ K}$.
14. On admet, dans la suite, que le soleil possède une forme sphérique de rayon $R_S = 7 \cdot 10^8 \text{ m}$ et se comporte comme un corps noir de température $T_S = 5800 \text{ K}$.
 - a- Rappeler la loi de Stefan. La constante de Stefan vaut $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ S.I.}$. Préciser son unité.
 - b- Déterminer la puissance totale P_S rayonnée par le soleil.
 - c- En déduire l'expression de la puissance P_T reçue par la terre. (on note d la distance moyenne de la terre au soleil et R_T le rayon de la terre supposé sphérique).
15. En supposant que la terre est un corps noir de température T_0 , montrer que $T_0 = T_S \sqrt{\frac{R_S}{2d}}$. Calculer la valeur de T_0 . Commenter. On donne : $d = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$.
16. En fait, la terre est entourée par l'atmosphère qui peut être assimilée à une couche sphérique de même centre que la terre et d'épaisseur e très faible ($e \ll R_T$). L'atmosphère de température T_a permet de maintenir la terre à une température T_T (effet de serre). Le modèle adopté suppose que :
 - La terre et l'atmosphère rayonnent comme des corps noirs.
 - L'atmosphère absorbe la fraction α du rayonnement solaire et la totalité du rayonnement provenant de la terre.
 - La terre absorbe la fraction $(1 - \alpha)$ du rayonnement solaire et la totalité du rayonnement provenant de l'atmosphère vers la terre.
 - a- Faire un schéma et écrire les équations traduisant les équilibres radiatifs pour l'atmosphère et pour la terre.
 - b- En déduire l'expression de T_T .
 - c- Calculer la valeur numérique de T_T pour $\alpha = 0,87$. Commenter le modèle considéré.

Partie II :

A. Mécanique Quantique

Données :

• Constante de Planck : $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$. • Constante de Planck réduite : $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ J s}.$ • Masse de l'électron : $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$. • Masse du proton : $m_p = 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.	• Constante de Boltzmann : $k_B = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$. • Charge élémentaire : $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. • Vitesse de la lumière : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$. • $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.
---	---

En mécanique newtonienne, lorsqu'une particule vient heurter une barrière de potentiel, elle ne peut pas la franchir. En mécanique quantique, l'équation de Schrödinger admet des solutions à l'intérieur d'une barrière de potentiel, lorsque le potentiel n'est pas infini dans ces régions et que l'énergie totale de la particule est inférieure à l'énergie potentielle.

La faible pénétration de l'onde dans une région interdite à la particule classique associée est à l'origine de l'effet tunnel. Cet effet a joué un rôle historique important en permettant de comprendre la radioactivité α , ce qui a constitué une des premières confirmations de la mécanique quantique.

On s'intéresse au mouvement à une dimension d'une particule non relativiste de masse m et d'énergie totale $E > 0$ se déplaçant suivant l'axe (Ox) dans l'énergie potentielle $V(x)$. Dans ce qui suit, on note $\Psi(M, t) = \Psi(x, t)$ la fonction d'onde (complexe) de l'onde de De BROGLIE associée à la particule.

L'équation de Schrödinger vérifiée par $\Psi(x, t)$ s'écrit :
$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x, t).$$

Dans toute la suite, on cherchera les solutions de l'équation de Schrödinger pour des états stationnaires tels que $\Psi(x, t) = \varphi(x) \exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right)$.

I. Onde de De Broglie

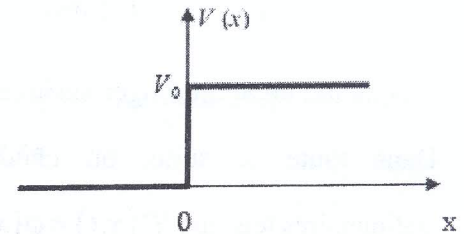
- 1- Quelle est la relation entre la mécanique quantique et la mécanique classique ? Citer certains faits et phénomènes physiques conduisant à développer la mécanique quantique ?
- 2- Décrire une expérience illustrant la notion d'onde de matière.
- 3- Énoncer la relation de de Broglie, pour une particule matérielle de masse m , reliant la quantité de mouvement p , et la longueur d'onde λ . Interpréter cette relation physiquement.
- 4- D'après la mécanique classique, déterminer la vitesse v_e acquise par un électron de masse m_e et de charge $(-e)$ accéléré par une tension U_a .
- 5- Exprimer la longueur d'onde λ_e d'un électron, de vitesse v_e en fonction du potentiel d'accélération U_a dans le cadre de la mécanique classique ($v_e \ll c$). Calculer les longueurs d'onde λ_1 , λ_2 et λ_3 respectivement pour les trois potentiels d'accélération suivants : $U_{a1} = 1 \text{ kV}$, $U_{a2} = 100 \text{ kV}$ et $U_{a3} = 1 \text{ MV}$. Vérifier dans chacun des cas la validité de l'hypothèse non relativiste sachant qu'un calcul en mécanique einsteinienne donne : $\lambda_1 = 38,8 \text{ pm}$; $\lambda_2 = 3,71 \text{ pm}$; $\lambda_3 = 0,94 \text{ pm}$.
- 6- La description de l'état d'une particule en un point M à l'instant t se fait au moyen d'une fonction complexe $\Psi(x, t)$. Pourquoi ?
- 7- Expliquer physiquement la signification de la fonction d'onde $\Psi(x, t)$ et de $|\Psi(x, t)|^2$? Interpréter la condition de normalisation de la fonction d'onde $\Psi(x, t)$.
- 8- On pose $\rho(x, t) = |\Psi(x, t)|^2$. Montrer que toutes les solutions de l'équation de Schrödinger $\Psi(x, t)$ vérifient l'équation :
$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \text{div } \vec{J}(x, t) = 0,$$
 où le vecteur $\vec{J}(x, t) = \frac{i\hbar}{2m} [\Psi(x, t) \overline{\text{grad}} \Psi^*(x, t) - \Psi^*(x, t) \overline{\text{grad}} \Psi(x, t)]$ est appelé courant de probabilité, $\Psi^*(x, t)$ étant le conjugué de $\Psi(x, t)$. Quelle est l'interprétation physique de cette équation ? Que devient cette équation dans le cas stationnaire ?
- 9- Donner $\vec{J}(x, t)$ pour une fonction d'onde de la forme : $\Psi(x, t) = A \exp(i f(x, t))$ où $f(x, t)$ est une fonction de x et de t .

10- On considère une particule libre de masse m , d'énergie totale E dont l'état peut être décrit par la fonction $\Psi(x,t)$. Donner la relation qui existe entre k et ω pour qu'une onde plane monochromatique $\Psi(x,t) = A \exp(-i(\omega t - kx))$ soit compatible avec l'équation de Schrödinger. En déduire la valeur de l'énergie E en fonction de ω . L'onde plane satisfait-elle les conditions de normalisation de la fonction d'onde ?

11- Déterminer le courant de probabilité dans le cas de la fonction d'onde $\Psi(x,t) = A \exp(-i(\omega t - kx))$, A étant une constante réelle.

II. Réflexion de particules sur un mur de potentiel

On envoie sur une marche d'énergie potentielle dans le sens des x croissants, un flux permanent monocinétique de particules de masse m et d'énergie E . En $x=0$, une particule rencontre une barrière de potentiel d'énergie $V(x) = V_0$ en forme de marche : dans le domaine $x < 0$, l'énergie potentielle est nulle. Dans le domaine $x \geq 0$, elle est égale à V_0 .



La zone d'énergie potentielle égale à V_0 s'étend à l'infini (voir figure).

12- Etudier les cas physiques possibles du mouvement de la particule dans le cadre de la mécanique classique selon que $E > V_0$ ou $E < V_0$. Sous quelle condition la particule pourra-t-elle franchir la barrière d'énergie potentielle ?

13- On étudie maintenant les cas physiques possibles du mouvement de la particule dans le cadre de la mécanique quantique dans le cas $E < V_0$.

13-a. Ecrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps relative à la région $x < 0$.

Pour cette région, la fonction d'onde indépendante du temps $\varphi_1(x)$ est la somme d'une onde de de Broglie d'amplitude A se propageant dans le sens x croissants et d'une onde d'amplitude B se propageant en sens inverse. Donner en fonction de E , m et $\hbar$, l'expression du module du vecteur d'onde k de ces ondes puis celle de la fonction d'onde $\varphi_1(x)$ en fonction des paramètres A , B et k .

13-b. Ecrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps relative à la région $x > 0$.

Montrer que dans cette région, la fonction d'onde de de Broglie indépendante du temps $\varphi_2(x)$ est de la forme $\varphi_2(x) = C \exp(-\gamma x)$. Interpréter cette solution et donner l'expression de γ en fonction des données.

13-c. Quelles sont les conditions de raccordement (continuité) relatives à la fonction d'onde et à sa dérivée spatiale qui permettent de déterminer les constantes qui interviennent dans les solutions précédentes ? En déduire les deux rapports d'amplitude $\frac{B}{A}$ et $\frac{C}{A}$.

13-d. Calculer le coefficient $\left| \frac{B}{A} \right|^2$. Quelle est sa signification physique et comment interprète-t-on la valeur qu'il a dans ce problème ? Quelle différence fondamentale subsiste par comparaison avec la mécanique classique ?

14- On envisage maintenant les cas physiques possibles du mouvement de la particule dans le cadre de la mécanique quantique dans le cas $E > V_0$.

La fonction d'onde de l'onde de de Broglie associée à la particule de masse m et d'énergie E et solution de l'équation de Schrödinger est donnée par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} A \exp(ikx) + r A \exp(-ikx) & \text{pour } x < 0 \\ t A \exp(ik_0 x) & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

Avec k est une constante définie à la question 13-a./, $E - V_0 = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m}$ et A est une constante.

t et r sont des coefficients que l'on calculera dans la suite.

14-a. Ecrire les conditions de raccordement de la fonction d'onde.

14-b. Calculer les coefficients t et r en fonction de k et k_0 .

14-c. Calculer le courant de probabilité J_i pour $x < 0$ puis J_2 pour $x > 0$. Commenter. Identifier les courants incident J_i , réfléchi J_r et transmis J_t . On définit un coefficient de réflexion R et de transmission

T de la marche de potentiel par : $R = \frac{J_r}{J_i}$ et $T = \frac{J_t}{J_i}$. Exprimer R et T ainsi que leur somme. Commenter et conclure. Calculer la limite de R et celle de T pour $k \rightarrow 0$ puis pour $k \rightarrow +\infty$. Comparer avec les résultats de la mécanique classique.

III. Barrière de potentiel

On étudie dans cette partie un des effets de la mécanique quantique qui va à l'encontre de la mécanique classique. On considère alors un faisceau d'électrons, non relativistes, de masse m , qui se déplace parallèlement à l'axe (Ox) dans le sens des x croissants, et qui vient heurter en $x = 0$ une barrière d'énergie potentielle de hauteur $V_0 > 0$ et d'épaisseur a définie par :

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{pour } 0 < x < a \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

15- Donner l'exemple d'un système physique qui pourrait être modélisé par la barrière de potentiel $V(x)$.

16- Que peut-on dire du point de vue de la mécanique classique sur la présence de la particule dans la région de l'espace $0 < x < a$?

17- On se place maintenant dans le cadre de la mécanique quantique. On considère une situation physique correspondant à une onde plane associée au flux incident de particules, venant de $x \rightarrow -\infty$ en direction de la barrière. Lorsqu'elle parvient à la discontinuité de potentiel en $x = 0$, cette onde donne naissance à une onde réfléchie dans la région $x < 0$ et à une onde "évanescence" pénétrant dans la région $0 < x < a$. A l'interface en $x = a$, l'onde se scinde à nouveau, en une onde évanescence réfléchie et en une onde progressive dans le sens des x croissants transmise dans la région $x > a$. On s'intéresse au problème de franchissement de la barrière par les particules venant de $x \rightarrow -\infty$ et possédant l'énergie E telle que : $0 < E < V_0$ (effet tunnel).

17-a. On note $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ et $\varphi_3(x)$ les solutions de l'équation de Schrödinger aux états stationnaires respectivement dans les régions $x < 0$, $0 < x < a$ et $x > a$.

Montrer qu'elles sont données par : $\varphi_1(x) = A_1 \exp(ikx) + A'_1 \exp(-ikx)$,

$\varphi_2(x) = A_2 \exp(\gamma x) + A'_2 \exp(-\gamma x)$ et $\varphi_3(x) = A_3 \exp(ikx) + A'_3 \exp(-ikx)$.

Où A_1 , A'_1 , A_2 , A'_2 , A_3 , et A'_3 sont des constantes. Donner les expressions de k et γ .

17-b. Justifier que pour la situation étudiée, la fonction d'onde dans la région $x > a$ ne comprend qu'un seul terme.

17-c. Ecrire les conditions de raccordement en $x = 0$ et $x = a$.

17-d. On définit les coefficients de réflexion R' et de transmission T' de la barrière par :

$$R' = \left| \frac{A_1'}{A_1} \right|^2 \text{ et } T' = \left| \frac{A_3}{A_1} \right|^2.$$

On montre qu'on obtient :
$$R' = \frac{(\gamma^2 + k^2)^2 \operatorname{sh}^2(\gamma a)}{4\gamma^2 k^2 + (\gamma^2 + k^2)^2 \operatorname{sh}^2(\gamma a)} \quad \text{et} \quad T' = \frac{4\gamma^2 k^2}{4\gamma^2 k^2 + (\gamma^2 + k^2)^2 \operatorname{sh}^2(\gamma a)}.$$

Comment varie le coefficient de transmission T' en fonction de l'énergie E ?

Discuter l'influence des paramètres V_0 et a sur le coefficient T' . On pourra poser $X = \frac{E}{V_0}$ et étudier $T'(X)$ en fonction de la variable X .

17-e. Etablir des formules approchées pour le coefficient de transmission T' dans le cas où la barrière est mince, puis dans le cas où la barrière est très épaisse. Que devient la transparence d'une barrière quelconque lorsque l'énergie cinétique des particules incidentes tend vers V_0 . Comparer ces résultats à ceux de la mécanique classique.

17-f. Dans la limite où $\gamma a \gg 1$, étudier le comportement du coefficient de transmission T' en fonction de a , m et $V_0 - E$.

Application numérique : La hauteur de la barrière de potentiel est $V_0 = 2eV$ et sa largeur est $a = 1 \text{ nm}$. Calculer le coefficient de transmission de la barrière pour un électron d'énergie $E = 1eV$, puis pour un proton de même énergie. Comparer les deux résultats et conclure. L'hypothèse $\gamma a \gg 1$ est-elle satisfaite ?

17-g. Déterminer le courant de probabilité dans chacune des régions $x < 0$, $0 < x < a$ et $x > a$.

Retrouver le fait que $R' + T' = 1$. Quel est le sens physique de cette équation ?

18- Comment est modifiée la fonction d'onde dans chacune des régions $x < 0$, $0 < x < a$ et $x > a$ dans le cas où la particule venant de $x \rightarrow -\infty$ en direction de la barrière a une énergie E telle que $E > V_0$?

B. Interférence lumineuses à N ondes

On envisage un réseau par transmission constitué d'une surface plane ne laissant pas passer la lumière et percée de N fentes parallèles de largeur e et de longueur L régulièrement espacées. Elles forment ainsi un motif répété périodiquement (période a). On considère que $L \gg e$ et que L est très grand devant les longueurs d'onde λ du domaine visible (figure 2).

L'indice de l'air est pris égal à 1.

1- Seuls des faisceaux lumineux parallèles sont envisagés. La direction de la lumière incidente est contenue dans le plan (yOz) . Pourquoi peut-on considérer que la direction de la lumière diffractée est également contenue dans ce plan ?

2-a. On note $\underline{a}_0(i, \theta, e, \lambda)$ l'amplitude diffractée par la première fente (0) dans la direction θ . Justifier que l'amplitude diffractée dans la même direction par la fente suivante (1) ne diffère de $\underline{a}_0$ que par l'ajout d'une phase supplémentaire φ que l'on déterminera en fonction de i , θ , a et λ la longueur d'onde de la lumière incidente.

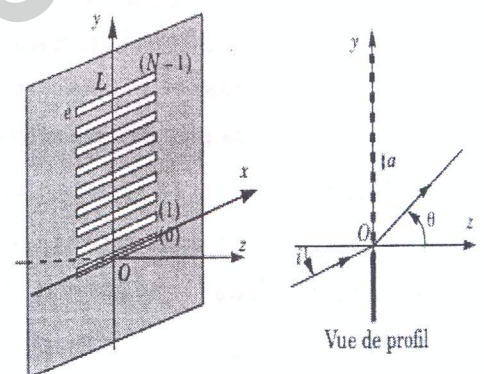
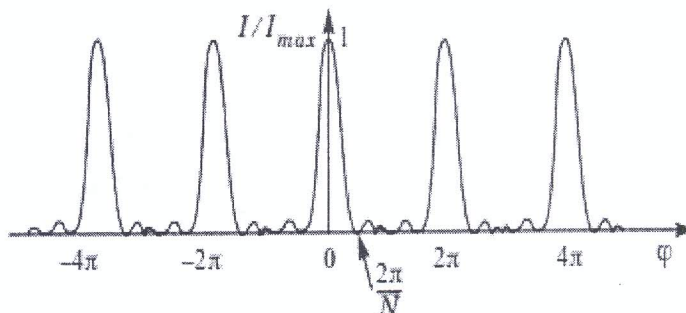


Figure 2

2-b. On admet que l'amplitude diffractée par le réseau peut s'écrire comme le produit de l'amplitude diffractée par un unique motif (la fente (0) par exemple) et d'un terme d'interférence à N ondes, noté $\underline{A}(N, \varphi)$ indépendant de la nature des motifs. Montrer que l'intensité diffractée dans la direction θ par les N fentes peut s'écrire sous la forme $|\underline{a}_0|^2 I(N, \varphi)$. Exprimer $I(N, \varphi)$ en fonction de $\underline{A}(N, \varphi)$. À quelle(s) condition(s) portant sur e peut-on considérer $\underline{a}_0$ comme indépendante des angles θ et i ? On se placera désormais dans ce cas.

2-c. On donne l'allure de la courbe $I(N, \varphi)$ en fonction du déphasage φ (figure ci-contre). Pour quelles valeurs de θ l'intensité diffractée est-elle maximale lorsque N devient grand ?



3- La surface d'un disque compact est modélisée par un ensemble de miroirs parallèles identiques aux fentes précédentes.

3-a. Montrer que le résultat précédent reste valable à condition de remplacer φ par une phase $\varphi'(i, \theta', a, \lambda)$ à déterminer.

Pour un disque compact $a = 1,6 \mu\text{m}$. Le disque est désormais éclairé en incidence normale.

3-b. Proposer un dispositif expérimental permettant d'observer la lumière diffractée dans les conditions décrites précédemment.

3-c. Y a-t-il mélange des ordres en lumière blanche ?

3-d. Peut-on voir son propre reflet dans un disque compact comme dans un miroir ? Les couleurs sont-elles modifiées ?