



Année universitaire : 2024/2025

★ ★ ★ ★ ★
Institut Préparatoire aux Etudes
d'Ingénieurs de Sfax
★ ★ ★ ★ ★

Devoir de Contrôle
Section : P.C.2-P.T.2

Durée : 1h30

Date : 29 Octobre 2024

Nbre de pages : 2

Problème

Pour tout $n \geq 1$, on note

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Partie I

1. Soit pour tout $n \geq 2$, $a_n = \frac{1}{n} - \int_{n-1}^n \frac{1}{t} dt$.

(a) Justifier que la série $\sum_{n \geq 2} a_n$ converge.

(b) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^n a_k = H_n - \ln(n) - 1$.

(c) En déduire qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que : $H_n = \ln(n) + A + o(1)$.

(d) Donner un équivalent simple de H_n .

2. Déterminer la nature des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$.

3. Soit $r \in \mathbb{N}$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{H_n}{(n+1)^r}$ converge si et seulement si $r \geq 2$.

On note pour tout $r \geq 2$, $S_r = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r}$.

Partie II

1. Pour $t \in [0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} t^k$.

(a) Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq \int_0^x R_n(t) dt \leq \frac{1}{(1-x)(n+2)}.$$

(b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, $n \in \mathbb{N}$, on a

$$-\ln(1-x) = \sum_{k=0}^n \int_0^x t^k dt + \int_0^x R_n(t) dt.$$



(c) En Dédire que pour tout $x \in [0, 1[$, on a

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

2. Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$,

$$-\frac{\ln(1-x)}{1-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n.$$

Partie III

1. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on note

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p (\ln(t))^q dt.$$

(a) Montrer que pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $I_{p,q}$ converge.

(b) Montrer que pour tout $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$,

$$I_{p,q} = \frac{-q}{p+1} I_{p,q-1}.$$

(c) En déduire pour tout $p, q \in \mathbb{N}$,

$$I_{p,q} = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}.$$

2. Soit $r \geq 2$ un entier. On admet la proposition suivante :

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Si $(b_n)_{n \geq n_0}$ est une suite à termes positifs telle que pour tout $x \in [0, 1[$, les séries $\sum_{n \geq n_0} b_n x^n$ et $\sum_{n \geq n_0} \frac{b_n}{(n+1)^r}$ convergent alors

$$\int_0^1 \sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n t^n (\ln(t))^{r-1} dt = \sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n \int_0^1 t^n (\ln(t))^{r-1} dt.$$

(a) Prouver que $\int_0^1 -(\ln(t))^{r-1} \frac{\ln(1-t)}{1-t} dt$ est convergente.

(b) Montrer que

$$\int_0^1 -(\ln(t))^{r-1} \frac{\ln(1-t)}{1-t} dt = (-1)^{r-1} (r-1)! S_r.$$

3. A l'aide d'une intégration par parties de $\int_0^1 -(\ln(t))^{r-1} \frac{\ln(1-t)}{1-t} dt$, montrer que

$$S_r = \frac{(-1)^r}{2(r-2)!} \int_0^1 \frac{(\ln(t))^{r-2} (\ln(1-t))^2}{t} dt.$$

4. En déduire que

$$S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Bon Travail