

Devoir de Synthèse d'Analyse

Problème

Partie I

On considère les suites de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x} \text{ et } g_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x}, \quad \forall n \geq 1.$$

On note respectivement $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ et $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$.

A) 1. Trouver les domaines de définition des fonctions f et g .

2. Montrer que g est continue sur son domaine de définition.

3. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

4. Etablir que $g(x) = \left(\frac{1}{2^{x-1}} - 1\right)f(x)$, $\forall x > 1$.

Déduire alors que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -1$ et que $g(2) = -\frac{\pi^2}{12}$ (on admettra que $f(2) = \frac{\pi^2}{6}$).

5. On pose $T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

(a) Montrer que T est continue sur $] -1, 1[$.

(b) Etudier la continuité de T au point (-1) .

(c) Montrer que T est C^1 sur $] -1, 1[$ et que $T'(x) = \frac{1}{1-x}$, $\forall x \in] -1, 1[$.

(d) Déduire que $T(x) = -\ln(1-x)$, $\forall x \in] -1, 1[$.

6. (a) Déterminer $g(1)$.

(b) Montrer alors que $f(x) \sim \frac{1}{1+x-1}$.

B) 1. Montrer que, $\forall n \geq 2$, g_n est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que $\int_0^{+\infty} g_n(t) dt = \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$.

2. la série $\sum_{n \geq 2} \int_0^{+\infty} |g_n(t)| dt$ est-elle convergente ?

3. Pour tout $n \geq 1$, on pose $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} g_k(x)$, $\forall x > 0$.

Montrer que R_n est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que $\int_0^{+\infty} R_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

4. Déduire que la fonction $x \mapsto g(x) + 1$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\int_0^{+\infty} (g(x) + 1) dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}.$$

Partie II

On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \geq 1, u_n = \int_0^1 \ln(1+t^n) dt \text{ et } v_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}.$$

1. Montrer que $u_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(kn+1)} \quad \forall n \geq 1$. (Ind. utiliser partie I . A. 5. d.)

2. Soit $S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+x)}$.

(a) Etudier la convergence normale de la série $\sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+x)}$ sur $] -1, +\infty[$.

(b) Montrer que S est continue sur $] -1, +\infty[$.

(c) Pour tout $n \geq 1$, exprimer u_n en fonction de S .

(d) Déduire que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{12n}$.

3. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

4. (a) Montrer, en utilisant une intégration par partie, que : $\ln(2) - n(1-v_n) = u_n, \quad \forall n \geq 1$.

(b) Déduire alors que $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\ln(2)}{n} + \frac{\pi^2}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Partie III

Pour a fixé dans $]0, 1[$, on considère la fonction $h_a(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n^x}$.

1. Montrer que h_a est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que, $\forall x > 0$,

$$\int_k^{k+1} \frac{a^t}{t^x} dt \leq \frac{a^k}{k^x}, \quad \forall k \geq 1 \quad \text{et} \quad \frac{a^k}{k^x} \leq \int_{k-1}^k \frac{a^t}{t^x} dt, \quad \forall k \geq 2.$$

3. Montrer que la fonction $G(x) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$ est bien définie et strictement positive sur $] -1, +\infty[$.

4. Montrer que $\forall x > 0$, la fonction $t \mapsto a^t t^{-x}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et que :

$$\int_1^{+\infty} a^t t^{-x} dt \leq h_a(x) \leq \int_1^{+\infty} a^t t^{-x} dt + a.$$

5. En utilisant le changement de variable ($u = -t \ln(a)$), montrer que :

$$\int_1^{+\infty} a^t t^{-x} dt = \frac{1}{(-\ln(a))^{1-x}} \int_{-\ln(a)}^{+\infty} u^{-x} e^{-u} du.$$

6. Déduire alors que $h_a(x) \underset{a \rightarrow 1}{\sim} \frac{G(-x)}{(1-a)^{1-x}}, \quad \forall x \in]0, 1[$.