

Devoir de Contrôle de Physique n° 01

Durée : 2h



Partie 1 : Mécanique des fluides : Vidange d'un réservoir

On considère un réservoir cylindrique d'axe vertical (Oz) orienté vers le haut, dont la base a pour aire S (Figure 1). Ce réservoir est rempli d'eau jusqu'à une certaine altitude h (soit $h = z_A$ pour un certain point A en surface). La partie basse de ce réservoir est percée d'un trou (point B), au contact d'un siphon ($B - C - D$), qui est une conduite de forme coudée et de section d'aire constante s très petite devant S .

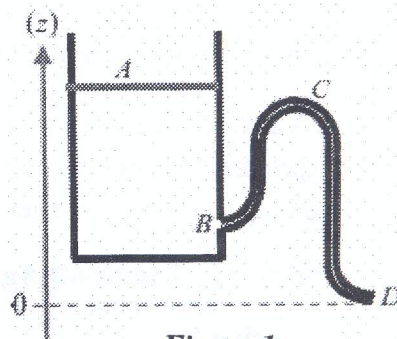


Figure 1

La surface libre de l'eau (en A) et la sortie du siphon (point D) sont en contact avec l'air libre (pression atmosphérique P_0). D est plus bas que B , qui est lui-même plus bas que A . L'altitude de référence $z = 0$ est celle du point D , et les points B et C sont à des altitudes constantes z_B et z_C . Dans les calculs qui suivent nous allons considérer que le siphon est amorcé: il est entièrement rempli d'eau, considérée comme un fluide homogène et incompressible de masse volumique ρ , le siphon ne contient pas d'air. Dans ces conditions nous allons déterminer le temps de vidange du réservoir. On note g l'intensité de la pesanteur.

1. Ecrire le théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant entre un point A à la surface de l'eau et un point D à la sortie du siphon. On suppose que les conditions d'application de ce théorème sont vérifiées. Quelles sont ces conditions ?

2. Justifier que la vitesse v_A de l'eau en A est très petite devant la vitesse en sortie du siphon v_D .

On remarque d'autre part que $v_A = -\frac{dh(t)}{dt}$.

3. Justifier qu'avec les hypothèses faites, l'altitude $h(t)$ de l'eau dans le réservoir obéit approximativement à l'équation différentielle : $\frac{dh(t)}{dt} + \frac{s}{S}\sqrt{2g}\sqrt{h(t)} = 0$

4. Résoudre cette équation en supposant qu'à l'instant initial, $h(t = 0) = h_0 \geq z_C$. En déduire que le niveau d'eau dans le réservoir parvient à l'entrée du siphon (en B) à l'instant t_1 :

$$t_1 = \frac{\sqrt{2} \cdot S}{\sqrt{g} \cdot s} (\sqrt{h_0} - \sqrt{z_B})$$

Que se passe-t-il à cet instant ?



Afin de modéliser l'écoulement de l'eau dans une grotte, on reprend les calculs précédents en supposant désormais que le réservoir est alimenté en permanence par une arrivée d'eau de débit volumique constant D_I qui ne perturbe pas l'écoulement de vidange (figure 2).

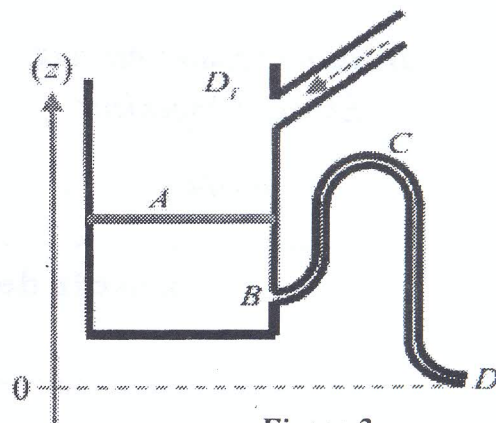


Figure 2

5. Dans les mêmes conditions que précédemment (le siphon étant rempli d'eau), justifier que la hauteur $h(t)$ de l'eau obéit maintenant à l'équation différentielle : $\frac{dh(t)}{dt} + \frac{s}{S} \sqrt{2g} \sqrt{h(t)} = \frac{D_I}{S}$.

6. Vérifier que cette équation possède une solution stationnaire, pour une hauteur d'eau h_s que l'on exprimera en fonction de D_I , s et g . Cette hauteur doit évidemment être supérieure à celle de l'entrée du siphon. A quel débit minimum $D_{I,min}$ cela correspond-il ?

Partie 2 : Electromagnétisme

Exercice 1

Dans ce problème, on étudie une application du phénomène d'induction : le four à induction.

On utilisera le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) dont les vecteurs unitaires sont $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

On considère un cylindre métallique en cuivre de rayon a , de hauteur L et de conductivité électrique γ entouré par un solénoïde (S) coaxial ayant n spires jointives par unité de longueur parcourues par un courant sinusoïdal $i(t) = I_0 \cos(\omega_0 t)$ (figure 3).

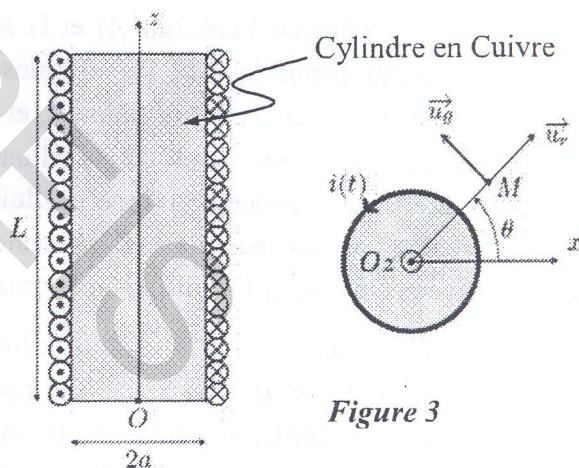


Figure 3

1- En négligeant les effets de bord ($L \gg a$), établir l'expression du champ magnétique $\vec{B}(t)$ à l'intérieur du solénoïde créé par le courant $i(t)$.

On admet que ce champ est nul à l'extérieur de (S).

2- En utilisant les propriétés de symétrie, montrer que le champ électrique induit est de la forme : $\vec{E}(M, t) = E(r, t) \vec{u}_\theta$.

3- A partir de l'une des équations de Maxwell, déterminer le champ électrique $\vec{E}(M, t)$ en tout point M du conducteur supposé avoir les mêmes propriétés électrique et magnétique (ϵ_0, μ_0) que le vide.

4- En utilisant la loi d'Ohm locale, en déduire le vecteur densité de courant de conduction volumique $\vec{J}_c(r, t)$. Déterminer la puissance instantanée par unité de volume ρ_v dissipée par effet Joule en tout point M du conducteur cylindrique puis sa valeur moyenne temporelle $\langle \rho_v \rangle$.

5- Calculer la puissance moyenne $\langle \mathcal{P} \rangle$ dissipée par effet Joule dans le conducteur.

A.N : $a = 0,1m$, $L = 1m$, $I_0 = 2A$, $\omega_0 = 100\pi \text{ rad s}^{-1}$, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ USI}$, $\gamma = 6 \cdot 10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$ et $n = 1000 \text{ spires m}^{-1}$.

L'énergie dissipée par effet Joule conduit à l'échauffement puis la fusion du barreau cylindrique.

6- Calculer la durée τ_f permettant de réaliser la fusion du cylindre en cuivre, sachant que la quantité d'énergie nécessaire pour la fusion est $Q = 1,14 \cdot 10^8 J$.

7- Pour augmenter la puissance dissipée par effet Joule, on utilise une pulsation $\omega = 100 \omega_0$. Calculer la puissance $\langle \mathcal{P}' \rangle$. En déduire la nouvelle valeur de τ_f' . Conclure.

Exercice 2

On étudie une onde électromagnétique dont le champ électrique est :

$$\vec{E}(M, t) = E_x(M, t)\vec{u}_x + E_y(M, t)\vec{u}_y \text{ avec } E_x(M, t) = E_0 \exp\left(j\left(\omega t - \frac{k}{3}(2x + 2y + z)\right)\right).$$

L'onde se propage dans le vide dont la longueur d'onde est : $\lambda = 0,6 \cdot 10^{-6} m$.

1- Dans quel domaine du spectre électromagnétique se situe cette onde ?

2- L'onde est-elle progressive? Donner l'expression du vecteur d'onde $\vec{k}$.

3- Établir l'équation cartésienne des surfaces d'onde. Commenter.

4- En utilisant l'équation de Maxwell-Gauss, déduire que : $E_y = -E_x$.

5- Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ de cette onde. L'onde est-elle transversale ?

6- Donner les expressions réelles des champs $\vec{E}(x, y, z, t)$ et $\vec{B}(x, y, z, t)$.

7- Déterminer l'expression de la densité d'énergie électromagnétique $u_{em}(M, t)$ associée à cette onde ainsi que sa valeur moyenne temporelle $\langle u_{em}(M, t) \rangle$.

8- Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{R}(M, t)$ de cette onde et sa moyenne temporelle. Commenter.

Exercice 3

Sur un banc optique, on place successivement une source de lumière de longueur d'onde λ_0 , un polariseur dont l'axe est orienté suivant $\vec{u}_x$. L'axe optique est suivant (Oz) .

1- A la sortie du polariseur, on peut considérer que la lumière est décrite par une onde plane progressive monochromatique de longueur d'onde λ_0 et polarisée rectilignement.

Donner l'expression de $\vec{E}_1(M, t)$ du champ électrique après le polariseur en fonction de ω , k , t , z , de l'amplitude E_0 du champ électrique et d'une phase à l'origine φ .

Quel est la relation entre k et λ_0 ? Et entre ω et k ?

2- On place ensuite, après le polariseur, un deuxième polariseur dont l'axe est orienté suivant une direction de vecteur unitaire $\vec{u}$ et faisant un angle θ avec l'axe (Ox) . On note $\vec{u}'$ le vecteur unitaire tel que $(\vec{u}, \vec{u}', \vec{u}_z)$ soit orthogonal direct.

Le second polariseur est appelé analyseur. On s'intéresse à l'intensité de la lumière après la traversée de cet analyseur.

2-a- Écrire le champ $\vec{E}_1(M, t)$ dans la base $(\vec{u}, \vec{u}', \vec{u}_z)$ et en déduire l'expression du champ électrique $\vec{E}_2(M, t)$ après l'analyseur.

2-b- En déduire les expressions du module de la valeur moyenne du vecteur de Poynting avant et après la traversée de l'analyseur. Montrer l'intensité de lumière I reçue par un détecteur placée après l'analyseur est proportionnelle à $E_0^2 \cos^2 \theta$. Discuter les cas limites observés. Nommer la relation obtenue.

