

Devoir de Physique du fin du 1^{er} Semestre
(Durée : 4 H)

Instructions générales :

- L'épreuve est constituée de deux parties A et B indépendantes.
- Dans chaque problème, certaines parties sont indépendantes. Un candidat peut toujours se servir d'un résultat fourni par l'énoncé pour continuer sa composition.
- On veillera à une présentation claire et soignée des copies. Il convient en particulier d'indiquer avec précision les références des questions

PARTIE A : Mécanique des fluides

I- Fluide parfait

On étudie un écoulement stationnaire incompressible à la vitesse $\vec{v}$ d'un fluide newtonien visqueux de masse volumique ρ . L'équation de Navier-Stokes décrivant le mouvement d'une particule fluide de cet écoulement s'écrit :

$$\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \cdot \vec{v} \right] = -\overrightarrow{\text{grad}} \frac{P}{\rho} + \vec{g} + \nu \Delta \vec{v}$$

- 1- Expliquer l'origine et la signification physique de chaque terme de cette équation.
- 2- Nommer la grandeur ν , quelle est sa signification physique, donner son unité dans le système international ?
- 3- Dans un premier temps, on néglige le terme $\nu \Delta \vec{v}$ ($\nu \approx 0$). Caractériser le fluide.
Pour un écoulement irrotationnel, établir le théorème de Bernoulli sous la forme :

$$\frac{P}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2} = \text{cte}$$

- 4- Analyser les termes de cette équation et énoncer le théorème de Bernoulli. Retrouver la loi fondamentale de la statique des fluides. Commenter.
- 5- Un jardinier arrose sa pelouse. Quand il se trouve limité par la longueur du tuyau, il aurait le réflexe de minimiser la section de sortie de ce tuyau. Ceci lui permettrait d'augmenter considérablement la vitesse de l'écoulement et donc de couvrir un maximum de pelouse. On modélise la partie du tuyau se trouvant dans la main du jardinier par un convergent cylindrique horizontal présentant deux sections différentes S_A et $S_B < S_A$ (Figure 1).

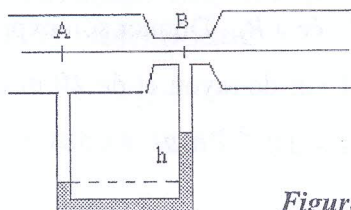


Figure 1

- 5.1- Déterminer la relation entre $\Delta p = p_A - p_B$, ρ , v_A et v_B (A et B sont dans la même hauteur).
- 5.2- Exprimer Δp en fonction de ρ , v_B , S_A et S_B . Comparer alors p_A et p_B .
- 5.3- On introduit une canalisation en U reliant A et B. Cette canalisation contient du mercure de masse volumique ρ' (Figure 1).
 - 5.3.1- On observe une différence de niveau h entre les deux surfaces libres du mercure. Etablir la relation entre Δp , ρ , ρ' , g et h .
 - 5.3.2- Montrer que le débit massique D_m peut s'écrire sous la forme :

$$D_m = \sqrt{\frac{2\rho(\rho' - \rho)gh}{k}}$$

Où k est un coefficient de forme que l'on exprimera.

5.3.3- Le débit massique peut aussi s'écrire : $D_m = \alpha \sqrt{h}$. Calculer le coefficient de proportionnalité α .

On donne : $\rho = 10^3 \text{ Kg/m}^3$; $\rho' = 13579 \text{ Kg/m}^3$; $h = 2,5 \text{ cm}$; $g = 9,81 \text{ m/s}^2$; $S_A = 3 \text{ cm}^2$ et $S_B = 0,2 \text{ cm}^2$.

II- Fluide réel

Dans un second temps, nous étudions l'écoulement stationnaire du fluide en tenant compte de sa viscosité tout en négligeant l'effet de pesanteur. Le système est une conduite cylindrique d'axe horizontal Oz , de rayon R et de longueur L (Figure 2).

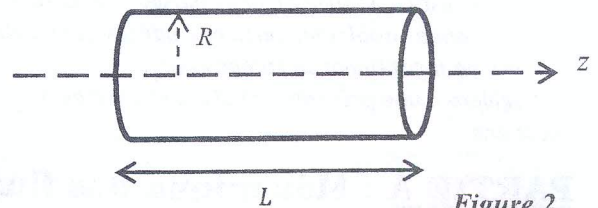


Figure 2

En tenant compte de la symétrie du problème, le champ de vitesse et le champ de pression dépendent à priori de r et de z . La vitesse s'écrit alors sous la forme : $\vec{v} = v(r, z)\vec{e}_z$.

6- Monter que $\vec{v}$ ne dépend pas de z .

7- En se basant sur l'équation de Navier-Stokes dans la base cylindrique, monter les deux relations suivantes :

$$\frac{\partial p(r, z)}{\partial r} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv(r)}{dr} \right) - \frac{\partial p(r, z)}{\partial r} = 0$$

Où η est la viscosité dynamique du fluide.

L'écoulement rectiligne uniforme est suffisamment lent pour être assimilé à un écoulement laminaire.

8- Soient p_E la pression du fluide à la section d'entrée et p_S la pression du fluide à la section de sortie de la conduite. Exprimer $p(z)$ en fonction de p_E , p_S et L .

9- Déterminer l'expression de la vitesse du fluide en fonction de r , R , $\Delta p = p_E - p_S$, L et η .

10- Déduire la vitesse maximale v_{max} et la vitesse moyenne v_m du fluide.

11- Donner l'allure du profil de la vitesse.

12- Soit D_v le débit volumique de l'écoulement. On pose $\Delta p = R_H D_v$. Justifier l'appellation de « résistance hydrodynamique » attribuée à R_H . Donner son expression et son unité.

Dans cette conduite cylindrique de 1 cm de rayon et de 20 m de longueur circule 1 litre d'eau par seconde.

Calculer v_m , R_H et Δp . On donne : $\eta = 10^{-3} \text{ Pa.s}$.

13- Montrer que la perte de charge linéique, $\varpi = (p_E - p_S)/L$ peut se mettre sous la forme :

$$\varpi = \frac{64}{Re} \times \frac{1}{2D} \rho v_m^2$$

Re est le nombre de Reynolds de l'écoulement et D le diamètre de la conduite.

Application : Perte de charge dans une seringue

On considère une seringue cylindrique de rayon $R = 0,8 \text{ cm}$ et de longueur $L = 9 \text{ cm}$. Elle est prolongée par une aiguille cylindrique de rayon $r = 0,8 \text{ mm}$ et de longueur $\ell = 3 \text{ cm}$ (Figure 3). Cette

seringue contient un sérum de viscosité $\eta = 3 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}$ et de masse volumique $\rho = 1,005 \cdot 10^3 \text{ Kg/m}^3$. Elle est munie d'un piston coulissant sans frottement.

Ce sérum est injecté dans la veine d'un patient.

Soit Δp_1 la perte de pression du sérum dans la seringue et Δp_2 la perte de pression du sérum dans l'aiguille. L'ensemble seringue/aiguille est en position horizontale.

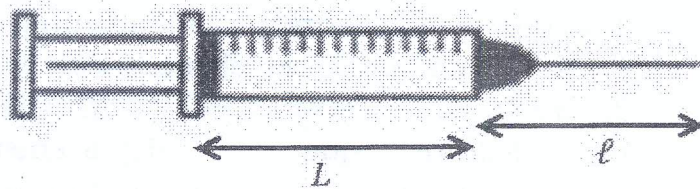


Figure 3

- 14- Montrer que Δp_1 et Δp_2 vérifient l'équation : $\frac{\Delta p_1}{\Delta p_2} = \frac{L}{l} \left(\frac{r}{R} \right)^4$
- 15- Dédurre qu'on peut considérer que le fluide est parfait dans la seringue.
- 16- Déterminer Δp_2 dans l'aiguille pour l'injection d'un volume $V = 1 \text{ cm}^3$ pendant une durée $\Delta t = 2 \text{ s}$.
- 17- La pression dans la veine du patient vaut $2 \cdot 10^4 \text{ Pa}$, déterminer la pression exercée sur le piston pour injecter le sérum.
- 18- De quel type d'écoulement s'agit-il ?

Formulaires : $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \cdot \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v}$

On donne en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}} A = \frac{\partial A}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial A}{\partial z} \vec{e}_z ; \text{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial (A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (A_z)}{\partial z} ; \Delta A = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}.$$

PARTIE B : Physique des Ondes

Problème I - Ondes mécaniques le long d'une corde

Les cordes des instruments de musique sont des fils métalliques cylindriques homogènes, tendus entre deux points séparés par une longueur L . Le rayon du cylindre est a avec $a \ll L$.

La corde de masse linéique λ est tendue avec la tension F . Au repos la corde est rectiligne et parallèle à l'axe horizontal (Ox).

On étudie les mouvements de la corde autour de sa position d'équilibre. On note $y(x, t)$ le déplacement transversal (ou ébranlement) du point de la corde à l'abscisse x à l'instant t . L'axe (Oy) est l'axe vertical ascendant.

On fait les hypothèses suivantes :

* Les déplacements sont petits, de même que l'angle que fait la corde avec l'axe (Ox), ce

qui entraîne : $\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \ll 1$.

* La tension de la corde en mouvement est : $T(x, t) = T_0 + T_1(x, t)$ avec $T_1(x, t) \ll T_0$ et $\frac{T_1(x, t)}{T_0}$

infinitement petit du même ordre ou d'un ordre supérieur à $\frac{\partial y(x, t)}{\partial x}$.

* On ne gardera que les termes du premier ordre en $y(x, t)$ et en ses dérivées.

* On néglige les effets de la pesanteur.

1-a On considère l'élément de corde de longueur $d\ell$ situé entre les plans d'abscisses x et $x+dx$. Montrer que : $d\ell \approx dx$ au premier ordre en $\left| \frac{\partial y}{\partial x} \right|$.

1-b Appliquer le principe fondamental de la dynamique à cet élément de corde (figure 4).

En déduire que le déplacement transversal $y(x,t)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0,$$

où c est une grandeur à exprimer en fonction de T_0 et λ .

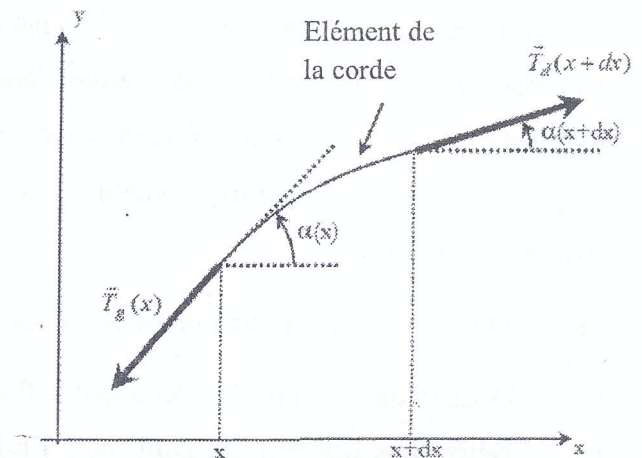


Figure 4

2-a Vérifier l'homogénéité de l'expression obtenue pour la célérité c .

2-b Calculer la célérité de l'onde acoustique c pour :

- une corde de guitare : masse linéique de l'acier $\lambda = 3 \text{ g m}^{-1}$, tension $T_0 = 103 \text{ N}$;
- une corde de piano : masse volumique de l'acier $\rho = 7800 \text{ kg m}^{-3}$, tension $T_0 = 805 \text{ N}$ et de diamètre du fil $\phi = 1,2 \text{ mm}$.

Commenter les valeurs obtenues.

2-c Donner sans démonstration la forme générale de la solution de l'équation de propagation.

La corde est fixée à ses deux extrémités, $x=0$ et $x=L$, ce qui impose les conditions aux limites : $y(0,t) = y(L,t) = 0$.

3- Modes propres, fréquences propres

3-a Qu'appelle-t-on onde stationnaire ?

3-b Montrer que les solutions en ondes stationnaires, physiquement acceptables, de l'équation de propagation sont de la forme : $y(x,t) = y_0 \cos(kx - \varphi) \cos(\omega t - \psi)$

Quelle est la relation entre ω et k ?

3-c Définir les modes propres et les fréquences propres de la corde.

3-d Montrer que les fréquences propres de la corde sont : $f_n = n \frac{c}{2L}$.

3-e Définir les ventres et les nœuds de vibrations. Déterminer les positions des nœuds et des ventres. Quelle est la distance entre deux ventres consécutifs ? Entre deux nœuds consécutifs ? Entre un ventre et un nœud consécutifs ?

3-f Représenter l'aspect de la corde à différents instants bien choisis pour $n=1$, $n=2$ et $n=3$.

3-g Proposer une expérience permettant de mesurer les fréquences propres d'une corde.

3-h On considère les cordes dont on a donné les caractéristiques à la question **2-b/**.

La corde de guitare permet de jouer une note de fréquence fondamentale (la plus basse des fréquences propres de la corde) $f = 147 \text{ Hz}$ (pour les musiciens, cette note est un *ré2*).

Quelle est la longueur de la corde de la guitare ? Quelle est la longueur de la corde de piano jouant la même note ?

Problème II - Ondes acoustiques dans un tuyau

On considère un tuyau de section circulaire notée A_0 et d'axe horizontal (Ox) rempli d'un fluide (figure 5).

Au repos, le fluide a une masse volumique ρ_0 et une pression intérieure P_0 identique à la pression extérieure (cette dernière sera supposée constante tout au long de cette partie). A l'équilibre, le champ de vitesses du fluide est nul.

On s'intéresse à la propagation de perturbations acoustiques de petites amplitudes suivant l'axe (Ox), ce qui permet de se placer dans le cadre de l'approximation de l'acoustique linéaire. Les champs de vitesses, de pression, et de masse volumique s'expriment alors sous la forme : $\vec{v}(x,t) = v(x,t) \vec{u}_x$, $p(x,t) = P_0 + p_1(x,t)$ et $\rho(x,t) = \rho_0 + \rho_1(x,t)$.

Où $\vec{u}_x$ est le vecteur unitaire selon la direction (Ox). $v(x,t)$ est le champ de vitesses du fluide et $p_1(x,t)$ est la surpression par rapport à P_0 . Le fluide étant supposé parfait, on considère que ces grandeurs sont uniformes sur une section du tuyau.

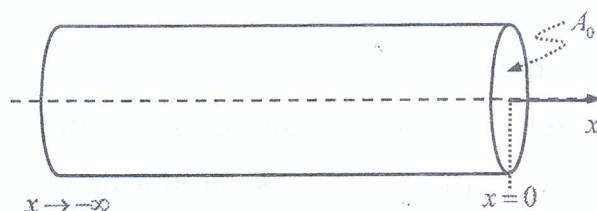


Figure 5

Le fluide compressible est décrit par le coefficient de compressibilité isentropique χ_s , supposé constant, dont l'expression est donnée par : $\chi_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s$.

A- Ondes acoustiques dans un tuyau rigide

On se place tout d'abord dans le cas où la section A_0 du tuyau est constante et ne dépend pas de la surpression.

1- Ecrire l'équation thermodynamique caractérisant le fluide subissant une évolution isentropique.

2- Ecrire l'équation d'Euler linéarisée et en déduire une première équation différentielle entre la vitesse acoustique $v(x,t)$ et la surpression $p_1(x,t)$.

3- Ecrire l'équation générale de conservation de la masse et montrer qu'elle se réduit ici, en se limitant toujours au 1^{er} ordre, à l'équation différentielle : $\rho_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial \rho_1(x,t)}{\partial t} = 0$.

4- Montrer enfin que la surpression $p_1(x,t)$ et la vitesse $v(x,t)$ obéissent à une équation de type d'Alembert. En déduire l'expression de la célérité c de l'onde acoustique en fonction de χ_s et de ρ_0 .

Déterminer la valeur de c dans le cas de l'eau $\rho_0 = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ et $\chi_s = 5,2 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$.

5- On considère un tuyau dans lequel se propage une onde acoustique progressive monochromatique de longueur d'onde λ dans le sens des x croissants à la célérité de l'onde acoustique c . La surpression associée est notée :

$$p_{li}(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) = p_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right).$$

En $x=0$, une condition aux limites est imposée de telle sorte que l'onde incidente subit une réflexion. Une onde acoustique réfléchie prend naissance se propageant suivant la direction des x décroissants. La surpression associée à cette onde réfléchie est de la forme : $p_{1r}(x,t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right)$.

On suppose que, selon les conditions aux limites imposées à la terminaison ($x=0$) du tuyau, l'amplitude de la surpression de l'onde réfléchie est de la forme : $p_{0r} = \pm p_0$.

5-1- Dédurre l'expression de la surpression $p_{1r}(x,t)$ de l'onde réfléchie pour les deux cas : $p_{0r} = + p_0$ et $p_{0r} = - p_0$.

Exprimer alors la pression de l'onde résultante pour les valeurs de x négatives ($x < 0$) pour les deux conditions aux limites. Comment peut-on opérer expérimentalement pour imposer ces conditions ?

5-2- Quelle est la nature de l'onde acoustique résultante qui apparaît dans le tuyau ? Déterminer, dans chaque cas, les positions des ventres de surpression relatives à l'onde dans le tuyau pour les valeurs de x négatives ($x < 0$) qu'on exprimera en fonction de λ et un entier relatif n .

B - onde acoustique dans un tuyau élastique

Cette étude est conforme aux caractéristiques de l'aorte et aux grosses artères qui assurent la transmission sanguine pour les êtres humains. Ils sont considérés comme des tuyaux élastiques. Lors de l'écoulement du sang dans les artères, on peut négliger les effets de la viscosité. La masse volumique du sang ainsi que sa compressibilité sont semblables à celles de l'eau.

A l'équilibre (absence de l'onde acoustique), la section du tuyau élastique sera notée A_0 . Sous l'effet d'une augmentation de la pression interne due à la présence de l'onde acoustique, le rayon du tuyau $a(x,t)$ et par suite sa section $A(x,t) = A_0 + A_1(x,t)$ peut varier en fonction de x et t . On suppose que $A_1(x,t) \ll A_0$ (figure 6). Cette variation est due uniquement à l'effet de la pression lors de la transformation supposée isentropique. On peut alors décrire ce phénomène par un coefficient D_s , appelé coefficient de distensibilité isentropique (aptitude à la dilatation ou flexibilité) du tuyau qui s'exprime sous forme : $D_s = \frac{1}{A} \left(\frac{\partial A}{\partial p} \right)_s$. Ce coefficient est supposé constant dans la suite.

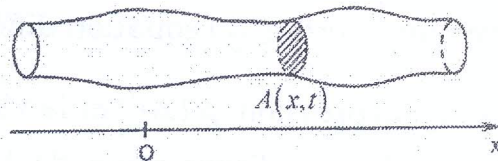


Figure 6

En présence de l'onde acoustique, la supposition d'une variation assez faible de la section $A(x,t)$ du tuyau est utile pour conserver les hypothèses de linéarité de la première partie du problème.

6- En présence de l'onde, l'équation de conservation de la masse associée au fluide s'écrit sous la forme : $\frac{\partial}{\partial x}(\rho(x,t) v(x,t) A(x,t)) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho(x,t) A(x,t)) = 0$.

En tenant compte des hypothèses citées précédemment, montrer que ce bilan se réduit à l'équation suivante : $\rho_0 A_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}(\rho(x,t) A(x,t)) = 0$.

En tenant compte des expressions de χ_s et D_s linéarisées, déduire que l'équation linéarisée décrivant le bilan de masse local :

$$(\chi_s + D_s) \frac{\partial p_1(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = 0.$$

7- En supposant que l'équation du bilan de quantité de mouvement reste valable, montrer que le champ de surpression $p_1(x,t)$ du fluide obéit à une équation de propagation d'onde acoustique de type d'Alembert avec une nouvelle célérité c' que l'on exprimera en fonction de ρ_0 , χ_s et D_s .

En comparant avec le résultat de la question 4, discuter des effets de la distensibilité d'un tuyau sur la propagation acoustique. En particulier, ce modèle permet-il d'aborder la propagation dans les fluides incompressibles ?

8- On cherche à exprimer la distensibilité du tuyau en fonction de ses caractéristiques mécaniques et géométriques. On suppose que le tuyau est un cylindre creux dont la paroi a une épaisseur h petite devant le rayon intérieur a_0 (tel que $A_0 = \pi a_0^2$) (figure 7).

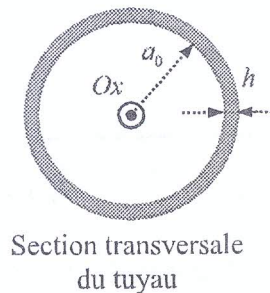


Figure 7

On admettra que la distensibilité D_s d'un tel tuyau est liée au module d'Young E du matériau constituant le tuyau par la relation : $D_s = \frac{a_0}{E h}$.

Montrer que, pour des fluides incompressibles ($\chi_s \approx 0$), on trouve la relation, dite de Moens-Korteweg : $c^2 = \frac{E h}{\rho_0 a_0}$.

9- Pour un tube en acier, le module d'Young vaut $E_{acier} = 10^{11} Pa$, alors que pour un tuyau en caoutchouc $E_{ca} \approx 10^6 Pa$. Calculer les distensibilités pour un tube en acier et un autre en caoutchouc de même rayon $a_0 = 1 cm$ et de même épaisseur $h = 2 mm$.

En déduire la célérité des ondes dans les deux cas quand le tube est rempli d'eau et comparer avec la célérité obtenue à la question 4.

Quel est, dans chaque cas, le facteur prédominant (compressibilité ou distensibilité) ? Dans quel cas la formule de Moens-Korteweg est-elle valide ?