

Devoir de Contrôle d'Algèbre - Semestre N°2
Sections : PC2 - PT2 Durée : 1h30min

Exercice

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $S(E)$ est l'espace des endomorphismes symétriques de E .

1. Soit $f \in S(E) \setminus \{0\}$ tel que f est non bijectif et $Sp(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f .

(a) Montrer que $0 \in Sp(f)$ et que f admet une valeur propre réelle non nulle.

(b) Dédurre que $E = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$.

Dans toute la suite, on suppose que f admet exactement $k+1$ valeurs propres deux à deux distinctes $(\lambda_j)_{0 \leq j \leq k}$, vérifiant : $\lambda_0 = 0$ et $0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_k|$.

2. Pour tout $j \in \{0, \dots, k\}$, on note $E_{\lambda_j}(f)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_j et p_j la projection orthogonale sur $E_{\lambda_j}(f)$.

(a) A l'aide du théorème spectral, montrer que $E = \bigoplus_{j=0}^k E_{\lambda_j}(f)$ et déduire $\sum_{j=0}^k p_j = \text{id}_E$.

(b) Montrer que $p_i \circ p_j = 0$, pour tout $(i, j) \in \{0, 1, \dots, k\}^2$ tel que $i \neq j$.

(c) Vérifier que $\forall j \in \{0, \dots, k\}$, $f \circ p_j = \lambda_j p_j$, puis montrer que $f = \sum_{j=0}^k \lambda_j p_j$.

(d) Soit p la projection orthogonale sur $\text{Im}(f)$.

En utilisant 1.(b), montrer que $\text{Im}(f) = \bigoplus_{j=1}^k E_{\lambda_j}(f)$, puis déduire que $p = \sum_{j=1}^k p_j$.

3. Soit $g = \sum_{j=1}^k \frac{1}{\lambda_j} p_j$. Montrer que $f \circ g = p$. On dit que g est l'inverse généralisé de f .

4. **Application** : On suppose que E est de dimension 4 muni d'une b.o.n $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.

Soit f un endomorphisme de E tel que $A = \text{Mat}(f, B) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Justifier que $f \in S(E) \setminus \{0\}$ et que f n'est pas bijectif.

(b) Montrer que $Sp(f) = \{0, 2, 4\}$. On pose $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 4$.

(c) Montrer que $E = E_0(f) \oplus E_2(f) \oplus E_4(f)$.

$\forall j \in \{0, 1, 2\}$, on note p_j la projection orthogonale sur $E_{\lambda_j}(f)$ et $M_j = \text{Mat}(p_j, B)$.

(d)(i) Justifier que $A = 2M_1 + 4M_2$.

(ii) Montrer $E_4(f)$ est de dimension 1 et déterminer un vecteur unitaire $u \in E_4(f)$.

(iii) Déterminer $p_2(x)$, $\forall x \in E$ et écrire $M_2 = \text{Mat}(p_2, B)$.

(iv) Soit g l'inverse généralisé de f . Dédurre $\text{Mat}(g, B)$.

Problème

Dans ce problème, $E = \mathbb{R}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ son sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n , ($n \in \mathbb{N}$).

Partie 1 :

On désigne par Φ l'application de E dans lui-même définie par :

$$\Phi(P)(X) = (1 - X^2)P''(X) - 3XP'(X).$$

1. Montrer que Φ est linéaire et induit un endomorphisme Φ_n de E_n .
2. (a) Ecrire la matrice A_n de Φ_n dans la base canonique $\mathfrak{B}_n = (1, X, \dots, X^n)$ de E_n .
(b) En déduire que Φ_n est diagonalisable.
3. Montrer qu'il existe une unique base $\mathfrak{B}'_n = (P_0, \dots, P_n)$ de E_n formée par des vecteurs propres P_k unitaires tels que $\deg P_k = k$, $\forall k \in \{0, \dots, n\}$.
4. (a) Calculer P_0 et P_1 .
(b) Montrer que $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $P_k(-X) = (-1)^k P_k(X)$.
(c) On suppose que $\forall k \in \{2, \dots, n\}$, $P_k(X) = X^k + a_{k-1}X^{k-1} + a_{k-2}X^{k-2} + \dots + a_0$.
Vérifier que $a_{k-1} = 0$ et $a_{k-2} = -\frac{k-1}{4}$.

Partie 2 :

1. Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\sqrt{1-t^2} dt$ est un produit scalaire sur E que l'on notera $(P|Q)$ et $\|\cdot\|$ sa norme associée.
2. Vérifier que pour tout $(P, Q) \in E^2$, $(XP|Q) = (P|XQ)$.
3. (a) Montrer que pour tout $(P, Q) \in E^2$, $(\Phi(P)|Q) = (P|\Phi(Q))$.
On pourra remarquer que $\forall x \in [-1, 1]$, $\Phi(P)(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{d}{dx} \left((1-x^2)^{\frac{3}{2}} P'(x) \right)$.
(b) En déduire que, pour tout couple (k, k') d'entiers naturels tel que $k \neq k'$, on a $(P_k|P_{k'}) = 0$ et que la base $\mathfrak{B}'_n = (P_0, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de E_n .
(c) En déduire que $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ et $Q \in E_{k-1}$, on a $(P_k|Q) = 0$. (Utiliser Partie 1 : 4.(c))
4. Soit $k \in \{2, \dots, n\}$.
(a) Etablir que $P_k - XP_{k-1}$ est de degré au plus $k-2$.
(b) Déduire que $P_k = XP_{k-1} - \frac{1}{4}P_{k-2}$.
5. (a) En écrivant X^k dans la base $\mathfrak{B}'_k$ de E_k pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, montrer que $(X^k|P_k) = \|P_k\|^2$.
(b) En déduire que $(P_k|X^{k+2}) = \frac{k+1}{4}\|P_k\|^2$, $\forall k \in \{0, \dots, n\}$.
(c) Montrer que $\forall k \in \{2, \dots, n\}$, $\|P_k\|^2 = \frac{k}{4}\|P_{k-1}\|^2 - \frac{k-1}{16}\|P_{k-2}\|^2$.
(d) Calculer $\|P_0\|$, $\|P_1\|$ et montrer que $\|P_k\|^2 = \frac{\pi}{2^{2k+1}}$, $\forall k \in \{0, \dots, n\}$.