

Examen d'Algèbre - Semestre N° 2
Sections : P.C.2 et P.T.2

Durée : 2h

Date : 05 Mai 2025

Nombre de pages : 3

Exercice / (5 points)

1. Soit $f(x, y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$.(a) Déterminer les extrémums relatifs de f .

(b) Montrer que chacun de ces extrémums est global.

(c) Déterminer l'équation du plan tangent (P) à la surface $\Gamma : z = f(x, y)$ au point $N(1, 0, 1)$.2. Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \Delta g(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

On pose alors $F(r, \theta) = g(r \cos \theta, r \sin \theta)$ pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$.

(a) Justifier que :

$$\Delta g(r \cos \theta, r \sin \theta) = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right)(r, \theta) = 0$$

(b) Pour tout $r > 0$, on pose :

$$\varphi(r) := \int_0^{2\pi} g(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta$$

i. Montrer que φ satisfait l'équation différentielle suivante :

$$r\varphi''(r) + \varphi'(r) = 0$$

ii. En déduire que φ est constante et que $\varphi(r) = 2\pi g(0, 0)$.

Problème/ (15 points)

Rappel. Pour f, g deux fonctions n fois dérivables, la formule de Leibniz donne :

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

Partie I

Soit $w :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, positive, non nulle et telle que $\int_a^b w(x) dx$ converge.

1. Montrer que pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\int_a^b P(x)Q(x)w(x) dx$ converge.
2. Justifier que l'application définie par :

$$(P, Q) \mapsto \int_a^b P(x)Q(x)w(x) dx$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

3. Montrer que pour tout $A, P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on a $(AP, Q) = (P, AQ)$.
4. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes orthogonaux vérifiant $\deg P_n = n$.
5. Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite orthogonale telle que $\deg P_n = n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
 - (a) P_n possède au moins une racine dans $]a, b[$.
 - (b) P_n est scindé et ses racines sont toutes dans $]a, b[$.
 - (c) Si de plus $a = -b$ et $w(-x) = w(x)$, alors $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$.
 - (d) Soit a_n le coefficient dominant de P_n , montrer que :

$$\forall n \geq 2, \quad P_n - \frac{a_n}{a_{n-1}} X P_{n-1} \in \text{vect}(P_{n-1}, P_{n-2}).$$

Partie II

On traite ici le cas $]a, b[=]-1, 1[$ et $w(x) = (1 - x^2)^\alpha$ avec $\alpha > -1$.

1. Justifier que l'application :

$$(P, Q) \mapsto \int_{-1}^1 P(x)Q(x)(1 - x^2)^\alpha dx$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit sur l'intervalle $] -1, 1[$, la fonction J_n par :

$$J_n(x) := (1 - x^2)^{-\alpha} \frac{d^n}{dx^n} [(1 - x^2)^{n+\alpha}]$$

- (a) Montrer que J_n est la restriction sur $] -1, 1[$ d'une fonction polynomiale de degré n .
(Ind. Utiliser la formule de dérivation de Leibniz)
- (b) Montrer que $(J_n, J_m) = 0$ pour $n \neq m$.
- (c) Montrer que $J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$.
- (d) Montrer que J_n est scindé et que ses racines sont dans $] -1, 1[$.

Partie III

Soit $\alpha > -1$ et $\varphi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par :

$$\varphi(P) = (X^2 - 1)P'' + 2(\alpha + 1)XP'$$

1. Vérifier que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on'a :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \varphi(P)(x) = -(1 - x^2)^{-\alpha} \frac{d}{dx} [(1 - x^2)^{\alpha+1} P'(x)]$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que la restriction $\varphi_n = \varphi|_{\mathbb{R}_n[X]}$ de φ à $\mathbb{R}_n[X]$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Montrer que $(\varphi(P), Q) = (P, \varphi(Q))$ lorsqu'il s'agit du produit scalaire de la Partie II.
4. Montrer que les valeurs propres de φ sont réelles et positives.
5. Montrer l'existence d'une base orthogonale $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ formée par des vecteurs propres de φ_n .
6. Soit $\lambda_n = n(n-1) + 2(\alpha+1)n$. Montrer qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\varphi(P_n) = \lambda_n P_n \quad \text{et} \quad \deg P_n = n$$

7. En déduire $\text{Sp}(\varphi_n)$ puis $\text{Sp}(\varphi)$.
8. Montrer que la famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ de la question 6) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
9. Pour $k, n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un endomorphisme ψ_k de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\varphi_n = (\psi_k)^k$.