

Devoir de Synthèse de Physique N°02
(Durée : 4 H)

Instructions générales :

- Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
- Tous les résultats demandés seront exprimés littéralement à l'aide des données, puis numériquement.
- Toute application numérique, qui ne comportera pas d'unité, ne donnera pas lieu à attribution de points.

Partie I : Diffusion Thermique

On considère un corps homogène (**figure 1**) de section droite S , de longueur L , de masse volumique ρ , de conductivité thermique λ , de capacité thermique massique c , avec λ , ρ et c sont des constantes. La température du matériau ne dépend que de x et de t et sera notée $T(x, t)$. Les parois parallèles à l'axe x sont isolées thermiquement et on note $\vec{J}(x, t) = J(x, t)\vec{e}_x$ le vecteur densité de courant thermique.

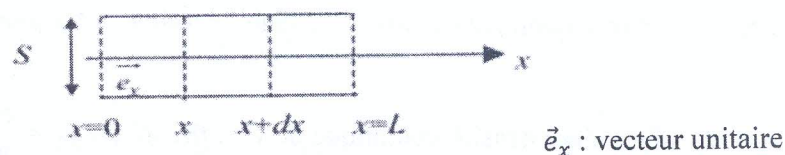


Figure 1

- 1- Que représente $J(x, t)$? Quelle est son unité ? Énoncer alors la loi de Fourier.
- 2- Effectuer un bilan local d'énergie pour un volume élémentaire de matériau compris entre les abscisses x et $x + dx$ entre les instants t et $t + dt$ au sein duquel une réaction exothermique dégage une puissance volumique notée Q_V . Donner alors l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $T(x, t)$ sous la forme :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = Q_V \quad (1)$$

On se place désormais (pour la suite des questions) en régime stationnaire.

- 3- Donner les lois de variation $J(x)$ et $T(x)$ en déduire la forme finale de l'équation de la diffusion thermique en présence d'une source interne de puissance volumique notée Q_V .
- 4- En supposant que les extrémités du matériau sont maintenues à températures constantes $T(0) = T_0$ et $T(L) = T_L$ et en considérant $\Phi = J \cdot S$ le flux thermique à travers la section droite S du matériau, on définit R_{th} , résistance thermique de conduction du matériau de longueur L et de surface S par la relation :

$$T_0 - T_L = R_{th} \cdot \Phi \quad (2)$$

Exprimer R_{th} en fonction de L , S et λ . En faisant l'analogie avec l'électrocinétique, justifier le terme de résistance thermique et préciser l'unité de R_{th} .

- 5- On considère une paroi composite constituée de trois milieux différents et homogènes 1 et 2 de conductivités λ_1 et λ_2 et d'épaisseurs respectives e_1 et e_2 et d'un milieu A d'épaisseur e_A , de conductivité λ_A

au sein duquel une réaction exothermique dégage une puissance volumique notée Q_V . Le contact des milieux est supposé parfait. Le coefficient d'échange par convection entre le milieu 1 et le milieu extérieur est appelé h_1 et la température du fluide loin de la paroi est notée T_{f1} . Le coefficient d'échange par convection entre le milieu 2 et le milieu extérieur est appelé h_2 et la température du fluide loin de la paroi est notée T_{f2} . Les températures de parois extérieures ainsi que des interfaces sont notées sur la **figure 2**.

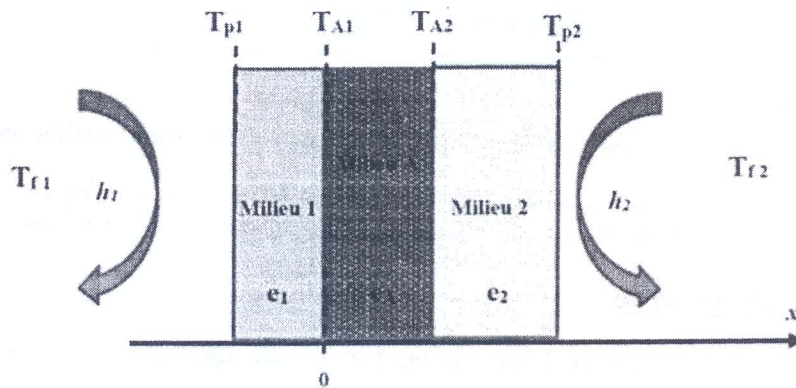


Figure 2

5.1 En utilisant l'équation (1), établir l'expression de la température $T_A(x)$ dans le milieu A sous la forme $T_A(x) = ax^2 + bx + c$ en déduire les expressions de a , b et c en fonction de Q_V , λ_A , e_A , T_{A1} et T_{A2} .

5.2 Etablir l'expression de la densité volumique de flux $J_A(x)$ dans le milieu A en fonction de x , Q_V , λ_A , e_A , T_{A1} et T_{A2} .

5.3 En utilisant l'équation (2), déterminer densité volumique de flux thermique $J_1 = \frac{\phi_1}{S}$ à travers la section droite S du milieu 1 en fonction des températures T_{f1} et T_{A1} . On utilisera les résistances thermiques de conduction et de convection correspondantes.

5.4 Déterminer la densité de flux $J_2 = \frac{\phi_2}{S}$ dans le milieu 2 en fonction des températures T_{f2} et T_{A2} . On utilisera les résistances thermiques de conduction et convection correspondantes.

5.5 En exprimant la continuité de la densité de flux $J(x)$ à l'abscisse $x = 0$, établir la formule qui lie T_{A1} et T_{A2} en fonction des données, on l'écrira sous la forme : $a_1 T_{A1} + a_2 T_{A2} = a_3$

5.6 En exprimant la continuité de la densité de flux $J(x)$ à l'abscisse $x = e_A$, établir la formule qui lie T_{A1} et T_{A2} en fonction des données. On l'écrira sous la même forme que la question précédente.

Partie II :

Optique Ondulatoire

A- Réseau plan par réflexion:

Le réseau utilisé est un réseau par réflexion constitué d'une succession de facettes réfléchissantes contenues dans le plan (Oxy) . Il est placé dans le vide et éclairé par une onde plane progressive monochromatique de longueur d'onde λ et d'amplitude de la vibration lumineuse associée est s_0 .

I- On considère une facette contenue dans le plan (Oxy) (le repère (O, x, y, z) étant orthonormé direct). Suivant (Ox) la largeur de la facette est b (elle est contenue entre $x = 0$ et $x = b$), alors que sa longueur (suivant (Oz)) est très grande devant la longueur d'onde λ .

L'onde incidente, est contenue dans le plan (Oxy) et fait un angle i_0 avec l'axe (Oy) ($i_0 \in [0, \pi/2]$). On observe l'onde diffractée dans la direction du plan (Oxy) faisant un angle θ avec (Oy) ($\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$) (figure 3).

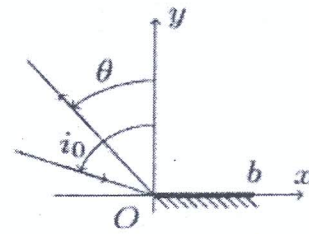


Figure 3

1- Énoncer le principe de Huygens-Fresnel.

2- Justifier qu'on se limite à l'étude de l'onde diffractée dans le plan (Oxy) .

3- Établir l'expression de $s_0(\theta)$, amplitude complexe de la vibration lumineuse diffractée à l'infini dans la direction θ .

4- En déduire l'éclairement $I_0(\theta)$ diffracté dans la direction θ par une facette. Préciser la valeur θ_0 de l'angle θ pour laquelle on a un maximum d'éclairement. Quel résultat d'optique géométrique retrouve-t-on?

5- Tracer l'allure de l'intensité lumineuse en fonction de $\sin \theta$. Préciser sur le graphique la largeur de la tache centrale de diffraction.

II-On considère un réseau constitué de N facettes identiques à la précédente, translatées les unes par rapport aux autres de la distance $a > b$, appelée pas du réseau, suivant (Ox) (figure 4).

L'onde incidente et la direction d'observation n'ont pas changé. On numérote les facettes de 0 à $N-1$ de façon à ce que la facette de rang n est comprise entre $x = na$ et $x = na + b$.

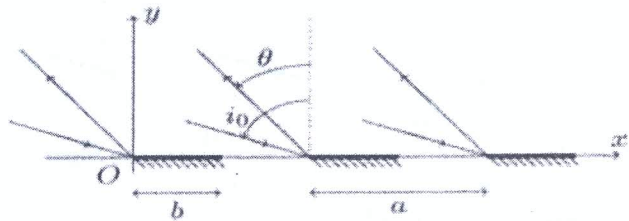


Figure 4

6- Soit $s_n(\theta)$ l'amplitude complexe de la vibration lumineuse diffractée à l'infini dans la direction θ par la n ème facette. Montrer que l'on peut mettre $s_n(\theta)$ sous la forme: $s_n(\theta) = s_0(\theta) \exp(jn\varphi)$; où φ est un déphasage à exprimer en fonction de λ , a et des angles i_0 et θ .

7- Déterminer l'amplitude diffractée par l'ensemble des fentes.

8- En déduire l'expression de l'éclairement $I(\theta)$?

9- La figure 5 représente le tracé de $I(\theta)$ en fonction de $\sin \theta$ en incidence normale ($i_0 = 0$) pour une radiation de longueur d'onde $\lambda = 520 \text{ nm}$. À quel domaine des ondes électromagnétiques appartient cette longueur d'onde ? Commenter ce tracé et déduire la valeur du pas a du réseau sachant que la direction θ_2 (correspondant à l'ordre d'interférence $p = 2$) pour laquelle on a une interférence constructive est telle que $\sin \theta_2 = 0,52$.

10- Préciser l'ordre d'interférence pour chacun des pics visibles. Pourquoi n'en voit-on pas plus ? Estimer la valeur de b .

11- Que se passe-t-il si on éclaire le réseau avec une lumière polychromatique ? Tracer $I(\theta)$ dans les mêmes conditions qu'à la question précédente pour une onde composée de deux radiations monochromatiques

de longueurs d'onde $\lambda_1 = 520 \text{ nm}$ et $\lambda_2 = 600 \text{ nm}$. Laquelle est la plus déviée ?

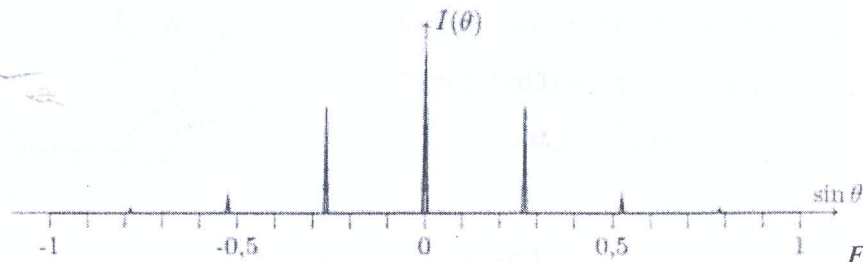


Figure 5

B- Réseau à échelettes :

En pratique on préfère utiliser un réseau à échelettes constitué de facettes réfléchissantes (largeur b) inclinées d'un angle α par rapport au plan du réseau. Une onde plane progressive monochromatique de longueur d'onde λ éclaire le réseau sous un angle i_0 par rapport à l'axe (Oy) et on observe l'onde diffractée à l'infini dans la direction faisant un angle θ avec ce même axe. Les angles d'incidence et d'observation par rapport à la normale à la facette sont respectivement γ_0 et γ (figure 6).

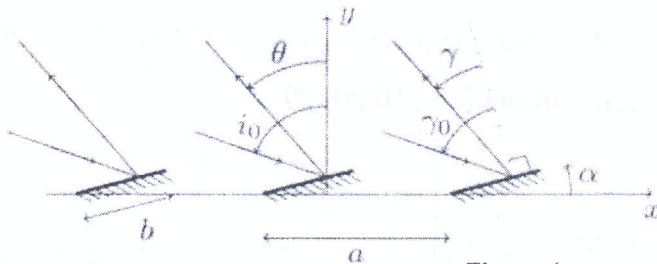


Figure 6

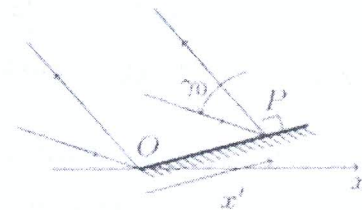


Figure 7

Diffraction par une facette :

12- Exprimer la différence de marche à l'infini entre les ondes correspondant à deux rayons incidents dont l'un arrive sur l'extrémité O de la facette et l'autre en un point P quelconque de la facette en fonction de γ_0 , γ et de la distance $x' = OP$ (figure 7).

13- En déduire l'expression de l'amplitude complexe $\underline{s}_0(\gamma)$ de la vibration lumineuse réfléchiée par une facette dans la direction γ .

14- Quelle est la valeur de γ correspondant au maximum d'éclairement de la figure de diffraction ?

Diffraction par le réseau :

15- Exprimer le déphasage entre deux ondes diffractées par deux facettes successives séparées d'une distance a , en fonction de a et des angles i_0 et θ .

16- On note θ_p les valeurs des directions d'observation correspondant aux maxima principaux. Exprimer $\sin \theta_p$ en fonction de i_0 , a , λ et de l'ordre d'interférence p .

17- On veut faire coïncider pour une longueur d'onde $\lambda = 520 \text{ nm}$, le maximum à l'ordre $p = 1$ du réseau avec le maximum de la figure de diffraction par une facette. Donner l'expression de l'angle α permettant de réaliser cette condition en fonction de a , λ et i_0 .

18- Sachant qu'il s'agit d'un réseau constitué de 1740 facettes par millimètre et qu'il est utilisé sous une incidence $i_0 = 61^\circ$, calculer α ainsi que l'angle θ_1 .

19- Quel est l'intérêt de ce réseau par rapport au réseau plan étudié dans **Partie A** ?

Mécanique Quantique : Modèle simplifié du noyau de deutérium

On se propose d'étudier les états stationnaires de fonction d'onde $\varphi(x)$ et d'énergie E d'un noyau de deutérium constitué d'un proton de masse m_p et d'un neutron de masse m_n .

Soit (Ox) l'axe passant par les deux nucléons. Du fait de l'interaction entre ces deux derniers, le problème

revient à représenter le noyau de deutérium par sa masse réduite $m = \frac{m_p m_n}{m_p + m_n}$ évoluant dans le potentiel

$$\text{suivant : } V(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x < 0 \quad (I) \\ -V_0 & \text{si } 0 \leq x < a \quad (II) \\ 0 & \text{si } x \geq a \quad (III) \end{cases}$$

Où V_0 et a sont des constantes positives.

Dans ce problème, on considèrera les états liés d'énergie E telle que $-V_0 < E < 0$ et on introduira les

constantes suivantes : $k^2 = \frac{2m(V_0 + E)}{\hbar^2}$ et $q^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2}$.

1- Représenter graphiquement l'allure du potentiel $V(x)$.

2-a- Ecrire l'équation de Schrödinger satisfaite par la fonction d'onde $\varphi(x)$ dans chacune des trois régions de l'espace (I), (II) et (III) où le potentiel est constant.

2-b- Résoudre ces équations et établir l'expression de $\varphi(x)$ dans chacune des trois régions de l'espace (I), (II) et (III) où le potentiel est constant.

2-c- Ecrire la continuité de $\varphi(x)$ au point $x = a$. En déduire la forme finale de la fonction d'onde $\varphi(x)$.

3-a- Ecrire les équations de continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée première au point $x = a$.

3-b- En déduire l'existence d'une condition de quantification de l'énergie.

3-c- Montrer que l'équation de quantification de l'énergie s'écrit :

$$|\sin(ka)| = \frac{k}{k_0} \quad \text{avec } \operatorname{tg}(ka) < 0, \text{ où } k_0 \text{ est une constante donnée par : } k_0 = \sqrt{k^2 + q^2} = \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}.$$

$$\text{On donne : } 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

4- Résoudre graphiquement l'équation obtenue et montrer que l'énergie des états liés du noyau est quantifiée.

5- Expérimentalement, on observe que le noyau de deutérium ne possède qu'un seul état lié. A quelle condition doit satisfaire la quantité $V_0 a^2$?

6- Tracer l'allure de la courbe de la fonction d'onde $\varphi(x)$ de cet état lié en fonction de x .

Physique du Laser :

I- Le milieu amplificateur d'un laser à Rubis est un barreau d'alumine (Al_2O_3) dans lequel les ions Al^{3+} sont remplacés par des ions Cr^{3+} qui seuls participent à l'effet laser. Le schéma des niveaux de ce laser peut être modélisé par un système à trois niveaux non dégénérés (ions Cr^{3+}) représenté sur la figure 8. Ce système est

considéré fermé, c'est à dire que le nombre total d'atomes par unité de volume N reste constant : $N = N_1 + N_2 + N_3$.

L'effet laser se produit sur la transition $2 \rightarrow 1$ de fréquence centrale ν_0 .

Le pompage du milieu amplificateur est effectué à l'aide d'une lampe flash de puissance P_f qui fait passer les atomes du niveau fondamental 1 vers le niveau excité 3.

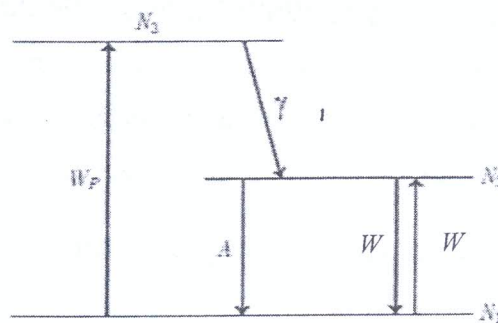


Figure 8

On désigne par W_p la probabilité par unité de temps qu'a un atome du niveau 1 d'être excité au niveau 3. On suppose que

les atomes excités dans le niveau 3 se désexcitent uniquement vers le niveau 2 avec une probabilité γ . La probabilité d'absorption et de l'émission stimulées W entre les niveaux d'énergie 1 et 2. La probabilité d'émission spontanée de la transition $2 \rightarrow 1$ est notée A .

1- Ecrire les équations d'évolution des populations N_1 , N_2 et N_3 .

2- Montrer qu'en régime stationnaire : $N_3 = \frac{W_p}{\gamma} N_1$ et $N_2 = \frac{W_p + W}{A + W} N_1$.

3- En déduire en régime stationnaire l'inversion de population saturée $\Delta N = N_2 - N_1$ en fonction de N , W_p , W et A . On suppose que la transition $3 \rightarrow 2$ est très rapide par rapport à toutes les autres transitions et que $\gamma \gg W_p$.

4- A quelle condition obtient-on l'effet laser ?

II- On désigne par Oz l'axe de révolution du faisceau laser gaussien et par $M(r, \theta, z)$ un point de l'espace repéré par ces coordonnées cylindriques d'axe (Oz). La résolution des équations de propagation conduit alors à associer au faisceau sortant du laser une intensité (ou densité surfacique de puissance) $I(r, z)$ dans

un plan transverse suit la loi suivante : $I(r, z) = I_0 \left(\frac{w_0}{w(z)} \right)^2 \exp \left(\frac{-2r^2}{w^2(z)} \right)$, où $w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2}$ avec

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}.$$

Pour une longueur d'onde λ , on note $\mathcal{P}$ la puissance associée à ce faisceau laser tel que : $I_0 = \frac{2\mathcal{P}}{\pi w_0^2}$.

5- Tracer les courbes représentants $I(r, z=0)$ et $I(r, z)$ en fonction de r pour deux valeurs fixées de z : $z=0$ et $z > z_R$. Que représente les grandeurs w_0 et $w(z)$? Préciser leur unité.

6- Représenter la courbe de la fonction $w(z)$ pour les valeurs de $z \geq 0$ en distinguant les zones $z < z_R$ et $z > z_R$. Préciser les cas limites où $z \ll z_R$ et $z \gg z_R$. Décrire la forme géométrique du faisceau dans chacune des zones. En déduire la nature des ondes électromagnétiques associées.

Un laser He-Ne émet à $\lambda = 0,6328 \mu m$ un faisceau gaussien caractérisé par une puissance $\mathcal{P} = 1 mW$ et un rayon de waist $w_0 = 0,75 mm$.

7- Définir la longueur de Rayleigh L_R . L'exprimer en fonction de z_R , puis en fonction de w_0 et λ . Faire l'application numérique et commenter.

8- Exprimer l'angle θ caractérisant l'ouverture du faisceau conique de centre O. Commenter l'expression de θ . Calculer sa valeur.

9- Comparer la divergence de ce faisceau gaussien avec l'angle d'ouverture du cône de diffraction (correspondant au premier minimum) produit par une onde plane éclairant une ouverture circulaire de diamètre $2w_0$ dont la valeur est : $\theta_c = 1,22 \frac{\lambda}{2w_0}$.

10- Focalisation d'un faisceau laser

On utilise une lentille convergente L de distance focale f dans le but de focaliser le faisceau laser.

10-1- Quelle condition (inégalité) doit-on imposer sur la distance entre la source laser et la lentille pour focaliser le faisceau ? A quel résultat simple aboutit l'optique géométrique ? Quelle intensité lumineuse est alors prévue au point de la convergence ?

10-2- Montrer que dans le cadre de modélisation du faisceau décrite précédemment, il est possible de prévoir qu'on n'obtient pas un point dans le plan focal de la lentille mais une tâche (dont la section varie en fonction de z et minimale dans le plan focal). Estimer le rayon w'_0 de la tâche à l'endroit où elle est minimale.

10-3- Comment doit-on choisir la distance focale de la lentille pour assurer la condition de focalisation ? Quelle est la nouvelle valeur de la longueur de Rayleigh L'_R ?

10-4- Pour le laser He-Ne (décrit précédemment), calculer l'amplitude de l'intensité I_0 du faisceau avant d'atteindre la lentille puis celle du faisceau émergent I'_0 au point situé dans le plan focal de la lentille. Commenter.

Fin de l'épreuve