

Examen de fin du deuxième semestre de Systèmes Techniques Automatisés

Sections : M.P.2 & P.C.2

Durée : 3H

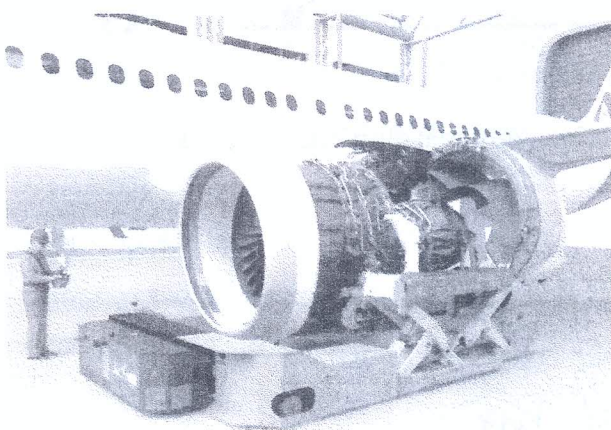
Date : 07 Mai 2025

- Aucun documents n'est autorisé.
- L'épreuve comporte deux parties indépendantes :
 - Partie A : Mécanique des Solides Indéformables (à rédiger sur le document réponses).
 - Partie B : Automatique (à rédiger sur le document réponses).
- Document énoncé partie A : **3 pages** — Document réponses partie A : **6 pages**
- Document réponses partie B : **8 pages**

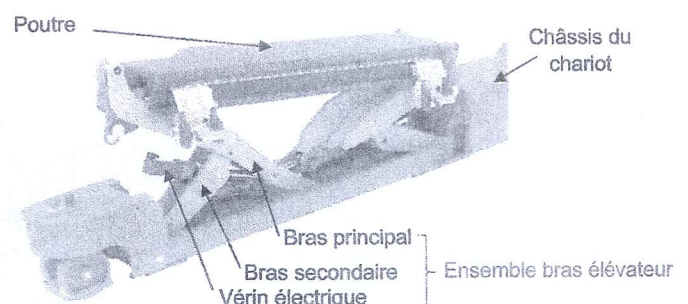
Étude d'un chariot JacXson U70

L'entretien des avions représente un budget conséquent pour les compagnies aériennes. Tous les 6 à 7 ans en moyenne, l'avion subit un entretien approfondi sur plusieurs semaines, durant lequel certaines parties sont refaites à neuf, de nombreux sous-assemblages sont démontés et des matériels sont systématiquement changés.

Parmi ces opérations, la révision d'un moteur s'avère l'une des plus contraignantes. En effet, ce dernier doit être désassemblé de l'avion. Pour cela, le groupe "EXCENT", basé en France, a développé le chariot "JacXson U70" qui propose une assistance mécanique entièrement pilotée tout en répondant à tous les impératifs liés à la manipulation des moteurs lors des différentes séquences de pose et dépose (Figure 1a). Le moteur de l'avion est supporté par deux poutres dont chacune est liée au châssis du chariot par deux sous-systèmes "bras élévateur" (Figure 1b), chacun constitué d'un bras principal, d'un bras secondaire et d'un vérin électrique (intégrant un moteur, un réducteur et un frein).



(a) Chariot JacXson en action



(b) Ensemble bras élévateur

FIGURE 1 – Chariot JacXson U70

Partie A. Mécanique des Solides Indéformables

Une modélisation paramétrée d'un ensemble bras élévateur est illustrée par le schéma plan de la Figure 2. Le principe de la cinématique de ce mécanisme repose sur deux bras :

- un bras secondaire (1) en liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}_0)$ avec le châssis (0) ;
- un bras principal (2) en liaison pivot d'axe $(B, \vec{z}_0)$ avec le bras (1) et en appui ponctuel de normale $(A, \vec{y}_0)$ avec le châssis (0) ;

Cette cinématique se caractérise par un déplacement purement vertical de l'extrémité C du bras principal suivant l'axe $(O, \vec{y}_0)$.

Le vérin électrique qui met en mouvement les deux bras (1) et (2) est représenté dans le plan de travail par les deux solides (3) et (4). Une schématisation simplifiée de ce vérin électrique est illustrée par la Figure 3.

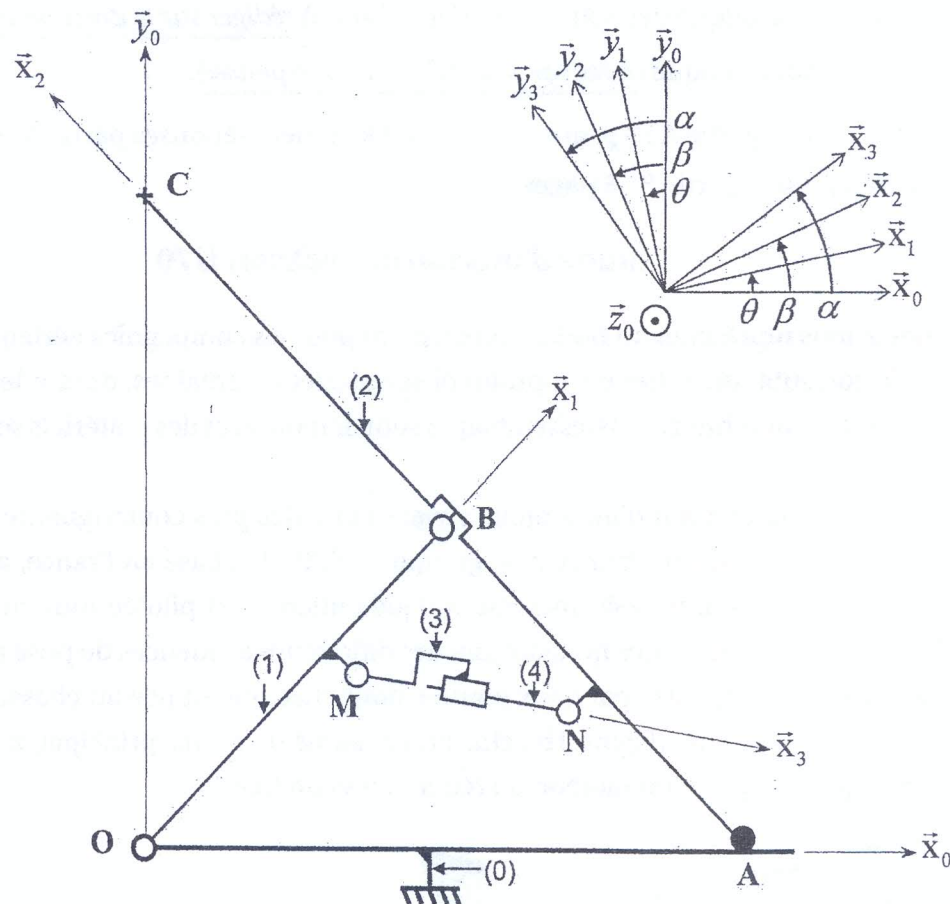


FIGURE 2 – Schéma cinématique minimal d'un bras élévateur

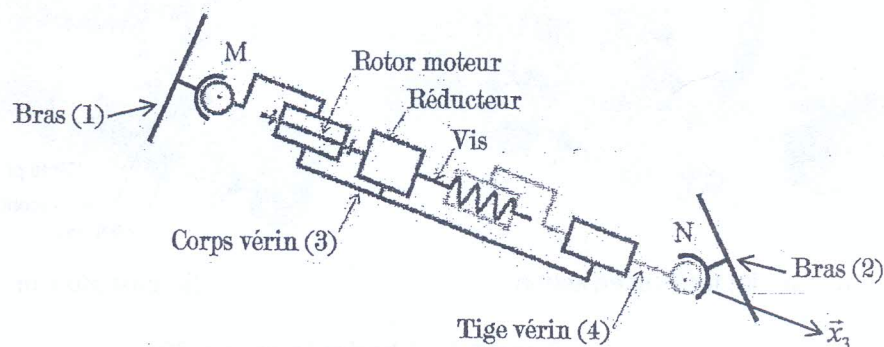


FIGURE 3 – Architecture simplifiée du vérin électrique

Repères et paramétrage :

- Le repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, supposé galiléen, est lié au châssis (0) du chariot supposé immobile.
- Le repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ est lié au bras secondaire (1) tel que $\theta(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$.
- Le repère $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ est lié au bras principal (2) tel que $\beta(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$.
- Le repère $R_3(M, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$ est lié au corps du vérin (3) tel que $\alpha(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$.

On donne :

$$\vec{OC} = \mu(t)\vec{y}_0 \quad ; \quad \vec{OA} = \lambda(t)\vec{x}_0 \quad ; \quad \vec{MN} = l_3(t)\vec{x}_3 \quad ; \quad \vec{OM} = l_1\vec{x}_1 - e_1\vec{y}_1 \quad ; \quad \vec{AN} = l_2\vec{x}_2 + e_2\vec{y}_2$$

$$OB = AB = BC = L \quad ; \quad \beta = \pi - \theta$$

où l_1, l_2, e_1, e_2 et L sont des caractéristiques dimensionnelles (constantes). $\theta, \beta, \alpha, \mu, \lambda$ et l_3 sont des paramètres de position du système, dépendants du temps (variables de configuration).

Données et hypothèses :

- Bras secondaire (1)
 - m_1 : masse du bras (1) ;
 - G_1 : centre d'inertie du bras (1) tel que $\vec{OG}_1 = a_1\vec{x}_1$;
 - $[I_0(1)] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_1}$: matrice d'inertie du bras (1) au point O dans la base $\mathcal{B}_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$;
- Bras principal (2)
 - m_2 : masse du bras (2) ;
 - G_2 : centre d'inertie du bras (2) tel que $\vec{BG}_2 = a_2\vec{x}_2$;
 - $[I_{G_2}(2)] = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & C_2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_2}$: matrice d'inertie du bras (2) au point G_2 dans la base $\mathcal{B}_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$;
- M_{ch} : masse concentrée au point C, modélisant la charge appliquée à l'extrémité du bras (2) ;
- ω_m : vitesse angulaire du moteur du vérin électrique ;
- J_m : Moment d'inertie du rotor du moteur du vérin électrique ;
- C_m : Couple moteur du vérin électrique.
- le champ de pesanteur est $\vec{g} = -g\vec{y}_0$;
- les masses et les moments d'inertie autres que ceux mentionnés ci-dessus sont négligés ;
- l'action de la pesanteur sur les solides 1, 2, 3 et 4 est négligeable. On tiendra donc que celle appliquée sur la masse M_{ch} ;
- toutes les liaisons sont supposées parfaites.

**AVIS IMPORTANT AUX ETUDIANTS**

1. Chacune des feuilles de votre copie doit comporter une étiquette code à barres placée à l'endroit indiqué «coller ici votre code à barres»
2. Une copie d'examen comporte une seule «feuille principale» et des «feuilles suites» Sur chacune de vos feuilles, le code à barres est obligatoire
3. Cette feuille d'examen est strictement personnelle Elle ne doit comporter aucun signe distinctif Elle doit être écrite en noir et/ou bleu
4. Le non respect de l'une de ces exigences peut faire attribuer la note ZERO à l'épreuve

**NOTE**

--

Coller ici votre code à barre

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

00	25	50	75

Partie A. Mécanique des Solides Indéformables**I. Étude géométrique d'un ensemble bras élévateur**

L'objectif est d'exprimer la loi entrée-sortie géométrique d'un ensemble bras élévateur et de valider le choix de la course du vérin électrique.

I.1) Donner les expressions des distances λ et μ en fonction de l'angle θ et de la longueur L .

.....

.....

.....

.....

$\lambda =$	;	$\mu =$
-------------------	---	---------------

I.2) En utilisant la fermeture géométrique de la chaîne cinématique des solides 0-1-3-4-2-0, montrer que la distance l_3 peut s'exprimer en fonction de l'angle θ sous la forme :

$$l_3 = \sqrt{(A_3 \cos \theta + B_3 \sin \theta)^2 + (C_3 \cos \theta + D_3 \sin \theta)^2}$$

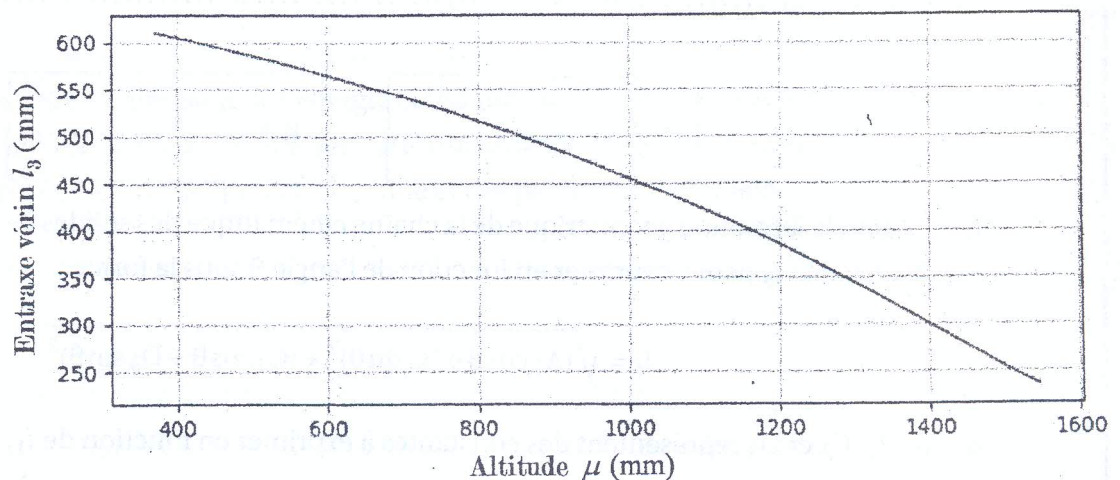
où A_3 , B_3 , C_3 et D_3 représentent des constantes à exprimer en fonction de l_1 , l_2 , e_1 , e_2 et L .

Nom, prénom et signature de l'enseignant surveillant	
---	--

 $A_3 = \dots\dots\dots$ $B_3 = \dots\dots\dots$ $C_3 = \dots\dots\dots$ $D_3 = \dots\dots\dots$

I.3) Les valeurs extrêmes d'altitude μ de l'extrémité C du bras (2) sont imposées par deux butées mécaniques physiques : une butée "mécanique haute" d'altitude $\mu_h = 1545$ mm et une butée "mécanique basse" d'altitude $\mu_b = 375$ mm.

On déduit du résultat précédent la variation de la distance l_3 (Entraxe du vérin) en fonction de l'altitude μ entre les positions extrêmes du point C définies par μ_b et μ_h (Figure ci-dessous).



Relever, de la figure ci-dessus, la course utile du vérin nécessaire pour assurer le déplacement de l'extrémité C du bras (2) depuis la position μ_b jusqu'à la position μ_h .

Course =

I.4) Le système vis écrou du vérin électrique (Figure 3) doit présenter une longueur filetée de la vis au minimum égale à la course utile augmentée de la longueur de l'écrou $L_{\text{écrou}} = 65 \text{ mm}$.

Sachant que la longueur filetée de la vis retenue par le constructeur est $L_{fc} = 510 \text{ mm}$, ce choix respecte-t-il le critère mentionné ci-dessus. Justifier votre réponse.

II. Étude cinématique et énergétique

L'objectif est de déterminer l'expression du couple moteur du vérin électrique.

II.1) Déterminer, dans la base $\mathcal{B}_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ et en fonction de L et $\dot{\theta}$, les torseurs cinématiques :

- du bras (1) dans son mouvement par rapport au châssis (0) au point B ;
- du bras (2) dans son mouvement par rapport au châssis (0) au point B.

$$\{\mathcal{V}_{(1/0)}\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\} ; \quad \{\mathcal{V}_{(2/0)}\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\}$$

II.2) Déterminer l'expression de l'énergie cinétique du bras (1) dans son mouvement par rapport au châssis (0). On écrira le résultat sous la forme $E_c(1/0) = \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}^2$ en précisant l'expression de J_1 .

$$E_c(1/0) = \dots\dots\dots ; \quad J_1 = \dots\dots\dots$$

II.3) Déterminer le torseur cinématique du bras (2) dans son mouvement par rapport au châssis (0) au point G_2 en fonction de L , a_2 et $\dot{\theta}$.

.....

.....

.....

$$\{\mathcal{V}_{(2/0)}\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$$

Sachant que $\vec{y}_1 = \sin(2\theta)\vec{x}_2 - \cos(2\theta)\vec{y}_2$, montrer que le vecteur vitesse $\vec{V}(G_2 \in 2/0)$ peut s'écrire :
 $\vec{V}(G_2 \in 2/0) = L\dot{\theta}\sin(2\theta)\vec{x}_2 - (L\cos(2\theta) + a_2)\dot{\theta}\vec{y}_2$

.....

.....

II.4) Déterminer, au point G_2 et dans la base $\mathcal{B}_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$, le torseur cinétique du bras (2) dans son mouvement par rapport au châssis (0).

.....

.....

.....

.....

.....

$$\{\mathcal{C}_{(2/0)}\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$$

II.5) Dédurre l'expression de l'énergie cinétique du bras (2) dans son mouvement par rapport au châssis (0). On écrira le résultat sous la forme $E_c(2/0) = \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}^2$ en précisant l'expression de J_2 en fonction des données cinétiques de ce solide et des paramètres géométriques L , a_2 et θ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**SUITE**Coller ici votre
code à barre

$$E_c(2/0) = \dots\dots\dots$$

$$J_2 = \dots\dots\dots$$

II.6) Montrer que le vecteur vitesse $\vec{V}(C \in 2/0)$ s'écrit sous la forme $\vec{V}(C \in 2/0) = V_c \vec{y}_0$ en précisant l'expression de V_c en fonction de L , θ et $\dot{\theta}$ (on donne : $\mu = 2L \sin \theta$).

.....
.....
.....
.....

$$\vec{V}(C \in 2/0) = \dots\dots\dots$$

$$V_c = \dots\dots\dots$$

II.7) Déduire l'expression de l'énergie cinétique de la masse concentrée M_{ch} dans son mouvement par rapport au châssis (0). On écrira le résultat sous la forme $E_c(M_{ch}/0) = \frac{1}{2} J_{M_{ch}} \dot{\theta}^2$ en précisant l'expression de $J_{M_{ch}}$ en fonction de M_{ch} , L et θ .

.....
.....

$$E_c(M_{ch}/0) = \dots\dots\dots$$

$$J_{M_{ch}} = \dots\dots\dots$$

II.8) Déterminer l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, M_{ch}\}$ dans son mouvement par rapport au châssis (0) en supposant que l'expression l'énergie cinétique du vérin (3 + 4) est : $E_c(3+4/0) = \frac{1}{2} J_m \omega_m^2$. On écrira le résultat sous la forme $E_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2} J_\Sigma \omega_m^2$ en précisant l'expression de J_Σ en fonction de J_1 , J_2 , $J_{M_{ch}}$, J_m et k où $k = \frac{\dot{\theta}}{\omega_m}$.

.....
.....
.....
.....
.....



$$E_c(\Sigma/0) = \dots\dots\dots$$

$$J_\Sigma = \dots\dots\dots$$

II.9) Déterminer la puissance des actions mécaniques extérieures et intérieures à l'ensemble Σ dans son mouvement par rapport au châssis (0).

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$P(\vec{\Sigma} \rightarrow \Sigma/0) = \dots\dots\dots$$

$$P_{\text{int}}(\Sigma) = \dots\dots\dots$$

II.10) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à Σ dans son mouvement par rapport au châssis (0), déterminer l'expression du couple C_m en fonction de J_Σ , $\dot{J}_\Sigma$, ω_m , $\dot{\omega}_m$, L , M_{ch} , θ , g et k .

.....

.....

.....

.....

.....

$$C_m = \dots\dots\dots$$



AVIS IMPORTANT AUX ETUDIANTS

1. Chacune des feuilles de votre copie doit comporter une étiquette code à barres placée à l'endroit indiqué «coller ici votre code à barres»
2. Une copie d'examen comporte une seule «feuille principale» et des «feuilles suites» Sur chacune de vos feuilles, le code à barres est obligatoire
3. Cette feuille d'examen est strictement personnelle Elle ne doit comporter aucun signe distinctif Elle doit être écrite en noir et/ou bleu
4. Le non respect de l'une de ces exigences peut faire attribuer la note ZERO à l'épreuve



NOTE

Coller ici votre
code à barre

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

00	25	50	75

Partie B : Automatique

Asservissement en position d'un bras de levage

On limite l'étude à l'asservissement en position du vérin électrique schématisé par la figure n°6 (voir page 8), qui motorise un bras de levage. Les notations utilisées dans cette partie sont définies dans le tableau donné à la page 8. On s'intéresse en particulier à la grandeur de sortie $l_3(t)$ qui représente la position de l'extrémité N de la tige (4) par rapport au point de référence M du corps (3) du vérin.

L'asservissement doit satisfaire les exigences suivantes :

Performances	Exigences souhaitées
<i>Précision vis-à-vis de la consigne</i>	L'erreur de position doit être nulle
<i>Précision vis-à-vis de la perturbation</i>	L'erreur de position doit être nulle
<i>Stabilité</i>	$M\phi \geq 60^\circ$ et $MG_{db} \geq 18db$
<i>Rapidité suite à un échelon de 372mm</i>	$T_{R5\%} < 120s$

Le système de levage doit être asservi en position lors de la phase d'accostage.

On désire asservir le moteur de chaque vérin uniquement sur l'intervalle $\theta \in [45^\circ, 65^\circ]$, correspondant à une phase d'accostage du moteur d'avion à l'aile de celui-ci.



La structure de l'asservissement en position du vérin électrique est présentée sur la figure n°1.

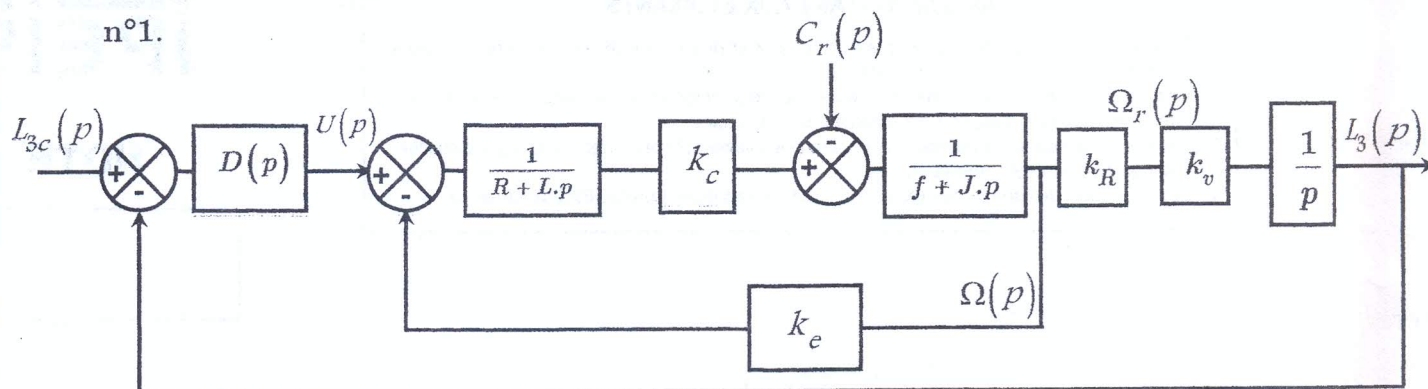


Figure n° 1. Structure de l'asservissement en position

On note $L_{3c}(p)$ la transformée de Laplace de la consigne exprimée en mm. Le bloc $D(p)$ modélise un correcteur. Les gains k_R et k_v modélisent respectivement le réducteur et le système vis-écrou ; on donne $k_R = r$, $k_v = \frac{a}{2\pi}$.

PARTIE I

On considère tout d'abord l'absence de variation du couple résistant ($C_r(p)=0$). Le constructeur a choisi de mettre en œuvre une correction proportionnelle : $D(p) = k_D$.

1. Donner l'expression littérale de la fonction de transfert en boucle ouverte $F(p)$ sous forme canonique en fonction de k_D , k_R , k_c , k_v , R , L , k_e , f , et J .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Déduire la classe α_{BO} du système en boucle ouverte ainsi que les l'expressions du gain statique noté K_{BO} et les erreurs statiques de position $\varepsilon_p(\infty)$ et de vitesse unitaire $\varepsilon_v(\infty)$.

Conclure sur le respect de l'exigence du critère de précision vis-à-vis de la consigne.

2. Le diagramme de Bode de $F(p)$ avec $k_D = 1$ est donné sur la figure n°2.

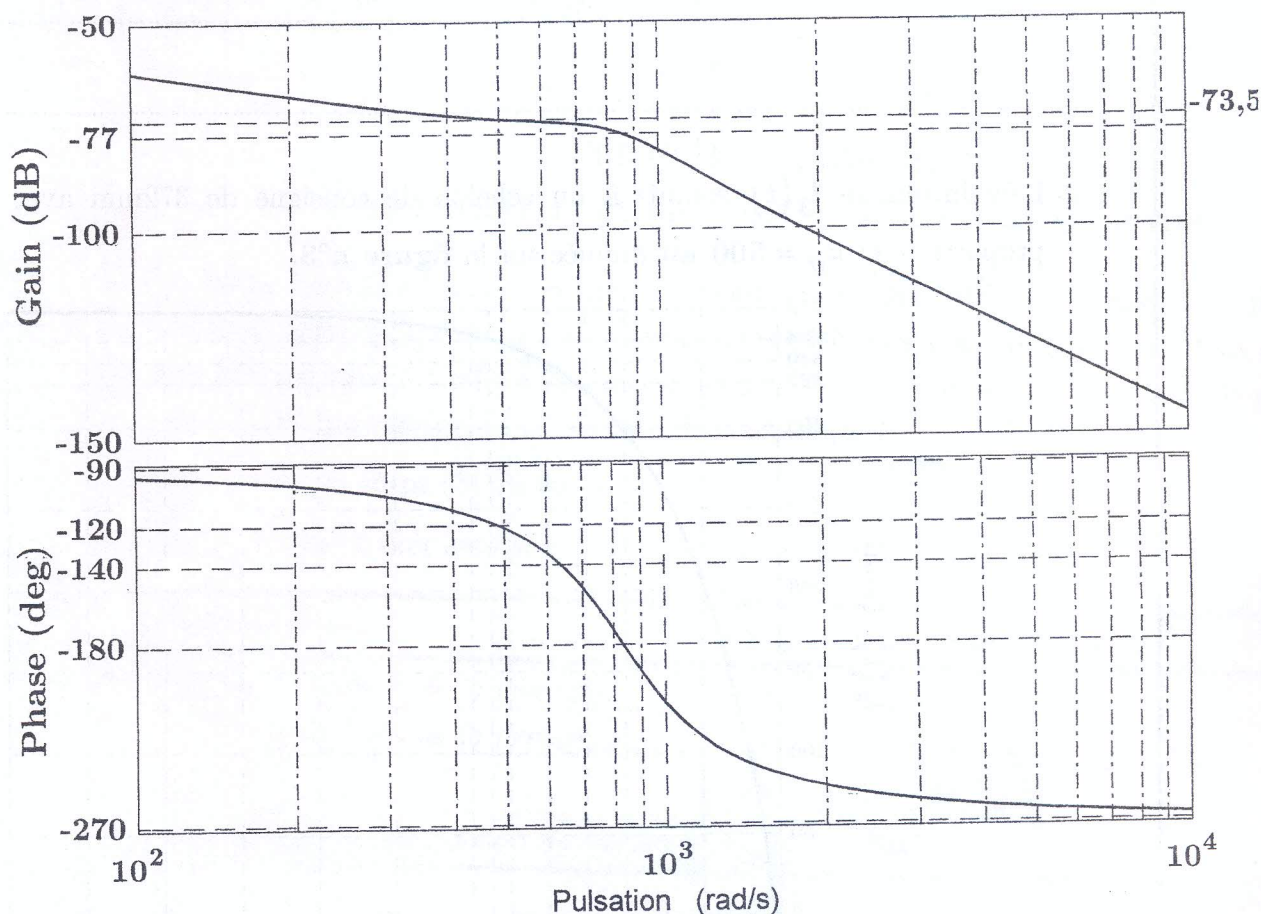


Figure n° 2. Diagramme de Bode de $F(p)$ avec $k_D = 1$

2.1. Déterminer graphiquement les valeurs des marges de phase $M\phi$ et de gain MG_{db} .

Conclure sur le respect des exigences du critère de stabilité vis-à-vis de la consigne.

2.2. Déterminer graphiquement la valeur de k_D permettant de respecter l'exigence de stabilité vis-à-vis la marge de gain $MG_{db} = 18db$ (notée $k_{D(-180^\circ)}$).

2.3. Déterminer graphiquement la valeur maximale de k_D permettant de respecter l'exigence de stabilité vis-à-vis la marge de phase $M\phi = 60^\circ$ (notée $k_{D(0db)}$).

3. L'évolution de $l_3(t)$ soumis à un échelon de consigne de 372mm avec un correcteur proportionnel $k_D = 500$ est donnée sur la figure n°3.

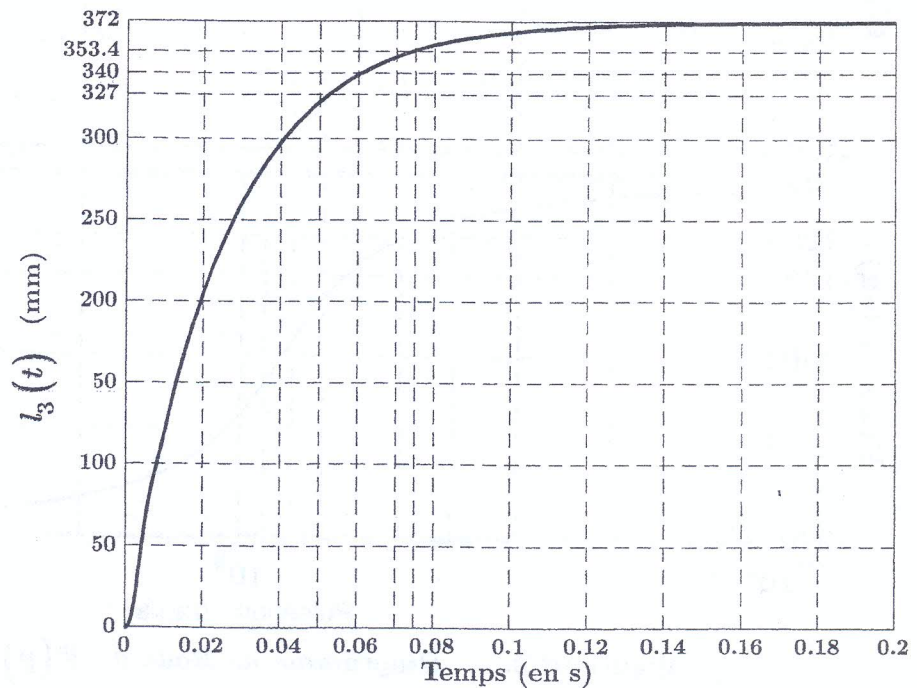


Figure n° 3. L'évolution de $l_3(t)$ soumis à un échelon de consigne de 372mm

Déterminer, à partir de constructions graphiques à réaliser sur la figure n°3, le temps de réponse à 5% ($T_{R5\%}$). Conclure sur le respect de l'exigence du cahier des charges en termes de rapidité.

**SUITE**

Coller ici votre
code à barre

PARTIE II

On s'intéresse désormais au comportement de l'asservissement suite à une variation de couple résistant $C_r(p)$. On considère l'absence de consigne $L_{3c}(p) = 0$ et $D(p) = k_D$.

4. Terminer le schéma bloc de l'asservissement en position sans consigne représenté par la figure n°4.

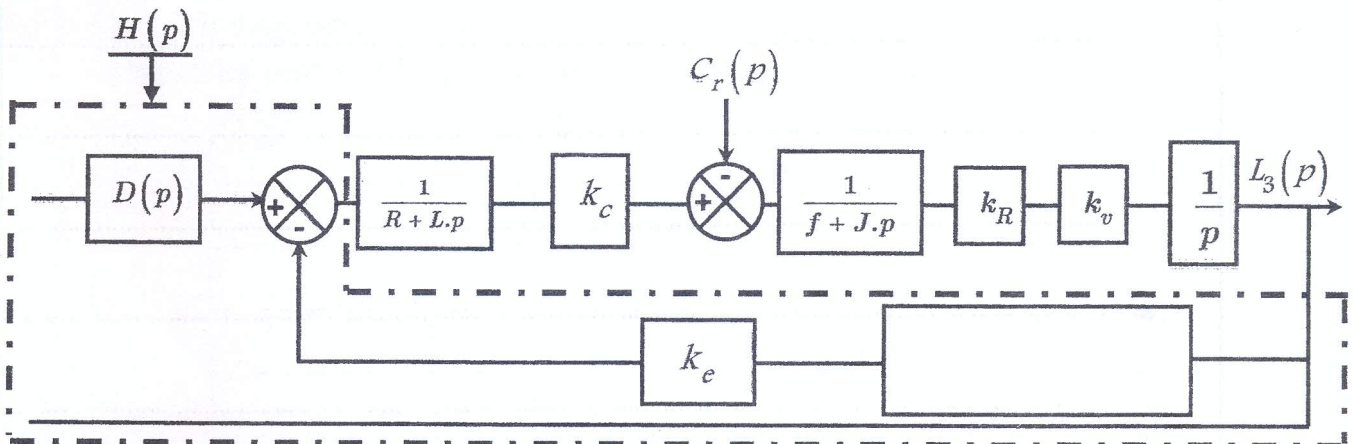


Figure n° 4. *Structure de l'asservissement en position sans consigne*

5. Donner l'expression littérale de la fonction de transfert $H(p)$ en fonction de k_D , k_R , k_e et k_v .

.....

.....

6. Dédurre l'expression littérale de la fonction de transfert $G(p) = \frac{L_3(p)}{C_r(p)}$ sous la forme

canonique suivante :
$$G(p) = - \frac{K_G(1 + \tau.p)}{Ap^3 + Bp^2 + Cp + 1}$$

.....

.....

.....

.....



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

 $K_G =$

.....

 $A =$

.....

 $\tau =$

.....

 $B =$

.....

 $C =$

.....

Pour la suite, on étudie la réponse du système suite à l'application d'un échelon du couple résistant de constante c_{r0} .

7. Donner l'expression de la valeur finale de la position $l_3(\infty)$ en fonction de c_{r0} , R , k_D et k_c . Faire l'application numérique avec $c_{r0} = 2,3 N.m$. Vérifier si l'exigence de précision vis-à-vis la perturbation est respectée.

.....

.....

.....

.....

.....

Dans l'objectif d'améliorer la précision, le constructeur a choisi de prendre un correcteur dont

la fonction de transfert est : $D(p) = \frac{K_i (1 + T_i p)}{T_i p}$

Avec $T_i = 2ms$ et $K_i = 9,463$.

8. Donner le nom de ce nouveau correcteur et justifier ce choix tout en expliquant ses effets sur les exigences du système.

9. Tracer le diagramme de Bode (asymptotique et allure du diagramme réel) du correcteur. Indiquer les pentes et les points caractéristiques en fonction de K_i et T_i .



Figure n° 5. *Diagramme de Bode de $D(p)$*

10. Conclure sur la pertinence du choix et du réglage de ce correcteur vis-à-vis les exigences de précision.

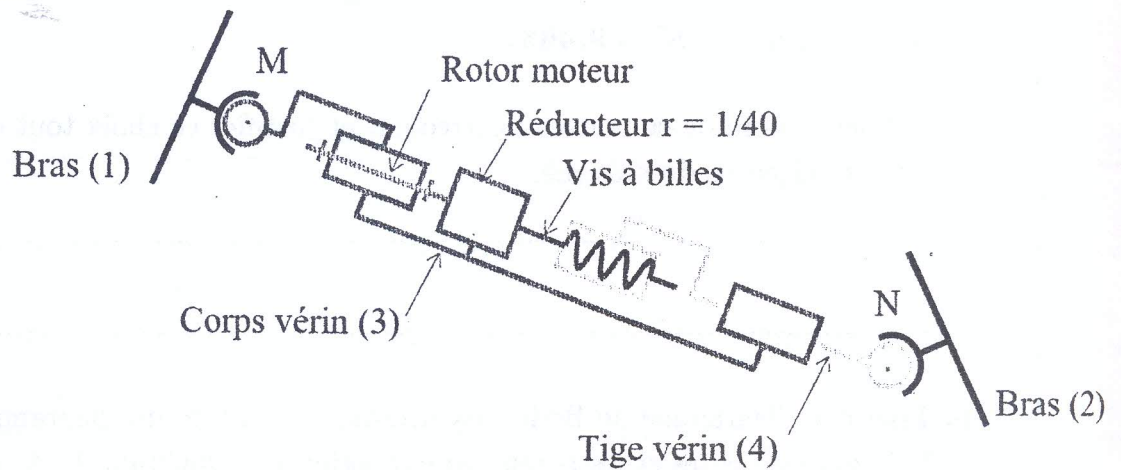


Figure n° 6. Architecture simplifiée d'un vérin électrique

Tableau 1 : Notations et spécifications

Symboles	Désignation	Valeurs, unités
$l_{3c}(t)$	Consigne de position de la tige du vérin par rapport au corps	[mm]
$l_3(t)$	Position de la tige du vérin par rapport au corps	[mm]
$u(t)$	Tension d'alimentation de l'induit du moteur	[V]
$\omega(t)$	Vitesse de rotation en sortie du moteur	[rad.s ⁻¹]
J	Moment d'inertie équivalent ramené sur l'arbre moteur	kg.m ²
$c_r(t)$	Couple résistant total ramené sur l'arbre moteur	[Nm]
R	Résistance de l'induit du moteur	0,24Ω
L	Inductance de l'induit du moteur	500μH
k_c	Constante de couple	0,24N.m.A ⁻¹
k_e	Constante de fem	0,24V.s.rad ⁻¹
f	Constante de frottement visqueux	10 ⁻² N.m.s
r	Rapport de réduction du réducteur	1 / 40
a	Pas du système vis-écrou	5mm

Transformée de Laplace : La transformée de Laplace d'une fonction dans le domaine temporel, $h(t)$, sera notée en majuscule : $L(h(t)) = H(p)$. On se place dans les conditions de Heaviside (conditions initiales nulles) pour les transformées de Laplace.