



Devoir de Synthèse d'Analyse

Problème

Partie I

- On considère la fonction $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.
 - Trouver le domaine de définition de la fonction S .
 - Montrer que S est continue sur $] -1, 1[$.
 - Montrer que S est de classe C^1 sur $] -1, 1[$ et calculer $S'(x)$.
 - En déduire l'expression de S sur $] -1, 1[$.
- Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{n+1}$ converge simplement sur $] -1, 1[$ et calculer sa somme.
 - Etudier la convergence normale de $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{n+1}$ sur $] -1, 1[$.
 - Etudier la convergence uniforme de $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{n+1}$ sur $] -1, 1[$.
- Justifier l'existence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt$. On notera I sa valeur.
 - Montrer que $\int_0^x \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt = -\frac{1-x}{x} \ln(1-x) - \frac{1+x}{x} \ln(1+x)$, $\forall x \in]0, 1[$.
 - En déduire la valeur de I .
- Montrer que $I = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(n+1)}$.
- Calculer les sommes: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, après avoir justifier leurs existences.

(b) En déduire que:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{4} - 2 \ln 2.$$

Partie II

A) On définit pour tout $x \in]-\infty, 1[$, la fonction F :

$$F(x) = \int_0^1 t^{-x} f(t) dt, \quad \text{où} \quad f(t) = \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t} \quad \forall t \in]0, 1[.$$

1. Etablir que F est bien définie sur $] - \infty, 1[$.
2. (a) Etudier la monotonie de la fonction F .
(b) Prouver que la fonction $t \mapsto tf(t)$ est bornée sur $]0, 1[$.
(c) En déduire que: $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.
3. Justifier l'existence de l'intégrale $\int_0^1 t^{-x} \ln(t) dt$, $x < 1$ et calculer sa valeur.
4. (a) Vérifier que: $\ln(1+t) \leq t \quad \forall t \in]-1, +\infty[$.
(b) Montrer que: $F(x) \geq \frac{1}{(1-x)^2}$.
(c) Déduire $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$.

B)

1. On se propose de montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.
(a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Soit g sa somme.
(b) Montrer que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
(c) Montrer que g est solution d'une équation différentielle que l'on déterminera. En déduire l'expression de g .
2. (a) Vérifier que $t^{-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\ln t)^n u^n}{n!}$, pour tout $(t, u) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
(b) En utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que $\forall x \in]-1, 1[$, on a

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k, \quad \text{avec} \quad c_k = \frac{1}{k!} \int_0^1 (-\ln(t))^k f(t) dt.$$

3. (a) Vérifier que: $\forall t \in]-1, 1[\quad \frac{\ln(1-t)}{t} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n} = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n+1}$.
(b) Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 1[$, $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n(n-x)^2}$.