



Matière :	Physique
Date :	Mercredi 29 Octobre 2025
Durée :	2 Heures
Nombre de pages :	04

On donne : En coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z ; \quad \Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} ;$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} ; \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

Ainsi que : $\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A}$.

PARTIE A : Mécanique des fluides :

On demande de caractériser l'écoulement défini dans le système de coordonnées polaires (r, θ) par le champ de vitesses suivant :

$$\vec{v}(M) = \frac{K}{r} \vec{e}_\theta$$

- 1- En exploitant l'expression du champ des vitesses et en utilisant les opérateurs mathématiques convenables, établir les propriétés de cet écoulement. En déduire les équations aux dérivées partielles vérifiées par cet écoulement.
- 2- En admettant que le champ de vitesses vérifie la relation suivante :

$$\vec{v}(M) = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \vec{e}_r - \frac{\partial \psi}{\partial r} \vec{e}_\theta$$

ψ étant une fonction caractérisant les lignes de courant de l'écoulement par l'équation : $\psi = Cte$.

- 3- Déterminer les équations et la forme des lignes de courant de cet écoulement. Faire un schéma.
- 4- Calculer l'accélération $\vec{\gamma}(M)$ d'une particule de fluide de cet écoulement. Justifier.
- 5- Montrer qu'il existe, pour cet écoulement, une fonction potentiel de vitesses ϕ , vérifiant l'équation de Laplace $\Delta \phi = 0$. Déterminer l'expression et la forme des équipotentiels $\phi = Cte$. Tracer les courbes des équipotentiels sur le même schéma des lignes de courant. Conclure.
- 6- Établir un bilan massique sur un tronçon de tube de courant de cet écoulement. En déduire la conservation du débit volumique.
- 7- Écrire l'équation d'Euler pour cet écoulement. Interpréter le résultat obtenu et conclure.

PARTIE B : Electromagnétisme :

Problème I : Electromagnétisme en régime variable

Un cylindre métallique de rayon a , de section $S_0 = \pi a^2$, de longueur ℓ et de conductivité γ est placé dans une zone où s'impose un champ magnétique homogène colinéaire à l'axe (Oz) (créé par des sources

En coordonnées cylindriques, ce champ magnétique appliqué

Le métal est non magnétique, de perméabilité magnétique μ_0 assimilable à celle du vide. On se place dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires.

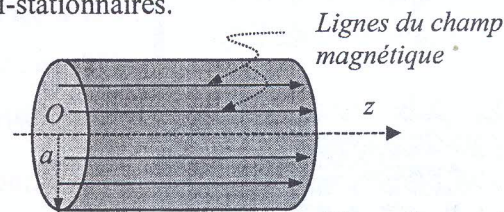


Figure 1

- 1- Rappeler l'équation de Maxwell-Faraday en régime variable ainsi que sa forme intégrale. Donner sa signification physique.
- 2- A l'aide d'arguments de symétrie et d'invariances, justifier que le champ électrique induit $\vec{E}$ associé à $\vec{B}_a$ s'écrit sous la forme : $\vec{E}(M,t) = E(r,t) \vec{u}_\theta$.
- 3- Déterminer l'expression du champ électrique induit $\vec{E}$ dans le cylindre en utilisant le théorème de Stokes.
- 4- Rappeler la loi d'Ohm locale reliant le vecteur densité de courant volumique $\vec{J}$ au champ électrique $\vec{E}$.
- 5- Exprimer la puissance volumique électromagnétique $\mathcal{P}_v(r,t)$ en fonction de la conductivité γ et $\vec{E}$.
- 6- En déduire alors la puissance moyenne $\langle \mathcal{P} \rangle$ dissipée par effet Joule dans le cylindre. Comment varie-t-elle en fonction du rayon a ?
- 7- A.N : On donne $B_0 = 0,1 T$, $\gamma = 2 \cdot 10^6 S m^{-1}$, $S_0 = 20 cm^2$, $f = 50 Hz$ et $\ell = 0,5 m$. Calculer $\langle \mathcal{P} \rangle$.

8- On remplace cylindre conducteur précédent par un autre cylindre de même longueur ℓ mais constitué de n tiges cylindriques identiques, chacune de section S'_0 et isolées entre elles telle que $S'_0 = \frac{S_0}{n}$ (figure 2). On note $\langle \mathcal{P}' \rangle$ la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans ce cylindre.

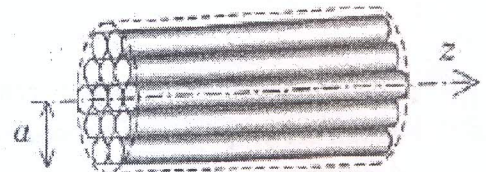


Figure 2

Quelle relation existe-t-elle entre $\langle \mathcal{P} \rangle$ et $\langle \mathcal{P}' \rangle$?

- 9- En se basant sur le résultat de la question 8/, expliquer comment peut-on réaliser le circuit magnétique d'un transformateur pour limiter les pertes par effet Joule due au courant volumique de Foucault.

Problème II : Ondes électromagnétiques

Propagation des ondes EM dans le vide

- 1- Rappeler l'expression des équations de Maxwell dans un milieu dépourvu de charges et de courants. Déduire l'équation de propagation dans le vide vérifiée par le champ électrique $\vec{E}$.
- 2- Donner la définition d'une onde électromagnétique plane progressive.
- 3- On considère une onde électromagnétique pour laquelle l'expression du champ électrique est donnée en coordonnées cartésiennes par : $\vec{E}(z,t) = E_0 \exp j\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \vec{u}_x$.

Où E_0 est son amplitude supposée constante positive, ω est la pulsation de l'onde et c la célérité de la lumière dans le vide.

3-1- Caractériser ce champ électrique de cette onde en précisant la direction, le sens de propagation, la planéité et l'état de polarisation.

Donner l'expression du vecteur d'onde $\vec{k}$. Quelle est l'unité de l'amplitude E_0 ?

3-2- En déduire l'expression du champ magnétique $\vec{B}(z, t)$ de cette onde.

4-1- Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\pi}$ au point M à l'instant t . Quelle est la signification physique de ce vecteur? Quel est son unité?

4-2- Déterminer la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting $\langle \vec{\pi} \rangle$. Commenter la direction et le sens de propagation de $\langle \vec{\pi} \rangle$.

4-3- Calculer l'énergie électromagnétique élémentaire moyenne $\langle dW_{em} \rangle$ qui traverse une surface S dont la normale est orientée selon le vecteur $\vec{u}_z$ pendant la durée dt .

4-4- Déterminer la valeur moyenne de la densité volumique $\langle u_{em} \rangle$ d'énergie électromagnétique.

5- L'onde arrive sur une cellule détectrice placée perpendiculairement à la direction de propagation de l'onde. On note $\langle \mathcal{P}_r \rangle$ la puissance électromagnétique moyenne reçue par la cellule détectrice de surface utile S .

Déterminer l'expression de E_0 en fonction de ε_0 , c , $\langle \mathcal{P}_r \rangle$ et S .

6- Comment doit-on placer une antenne (segment métallique) pour détecter l'onde électromagnétique? Justifier clairement votre réponse.

7- L'onde est maintenant détectée par un cadre conducteur rectiligne formant un carré de côté a , branché sur un voltmètre et placé dans le plan (xOz) comme indiqué sur la figure ci-contre. Le cadre est arbitrairement orienté comme représenté sur la figure de sorte que sa normale $\vec{N}$ est colinéaire à $\vec{u}_y$ (figure 3).

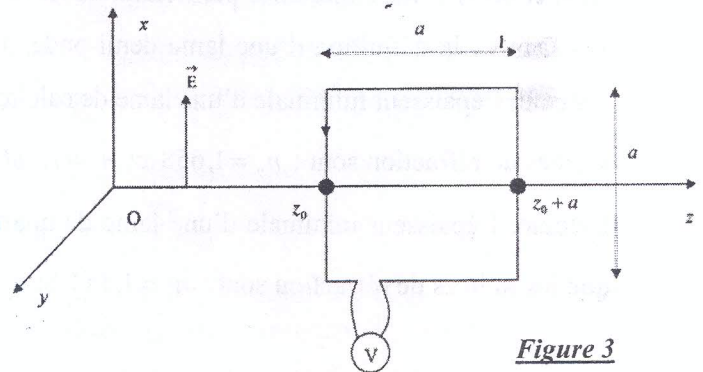


Figure 3

Le centre du cadre est repéré par l'ordonnée $z_0 + \frac{a}{2}$ et les brins verticaux sont situés aux positions z_0 et $z_0 + a$. On se place dans le cas où la longueur a du côté du cadre est telle que le champ magnétique ne peut pas être considéré comme uniforme sur la surface du cadre.

7-1- Calculer le flux ϕ_m du champ magnétique à travers le cadre en fonction de t , c , E_0 , ω , z_0 et a .

En déduire la force électromotrice induite $e(t)$ qui apparaît dans le cadre en fonction de t , c , E_0 , ω , z_0 et a .

7-2- Le voltmètre mesure une tension efficace U_{eff} , déterminer son expression en fonction de c , ω , a et E_0 .

8- La valeur du côté a étant donnée, montrer qu'il existe des valeurs ω_{max} de la pulsation ω pour lesquelles l'amplitude de la force électromotrice induite est maximale et d'autres valeurs ω_{min} pour lesquelles elle est

Lame à Retard

Une lame à retard est une lame mince à faces parallèles taillée dans un cristal uniaxe ayant des propriétés optiques anisotropes qui permet de modifier l'état de polarisation d'une onde électromagnétique sous incidence normale. La lame est caractérisée par deux indices : n_x selon l'axe (Ox) et n_y selon (Oy).

9- Si $n_x < n_y$, préciser l'axe rapide et l'axe lent. Justifier la réponse.

10- Une onde électromagnétique plane progressive harmonique arrive sous incidence normale à une lame à retard d'épaisseur e . Sa face d'entrée coïncide avec le plan ($z=0$). En dehors de la lame ($z < 0$ et $z > e$) le milieu se comporte comme le vide (figure 4).

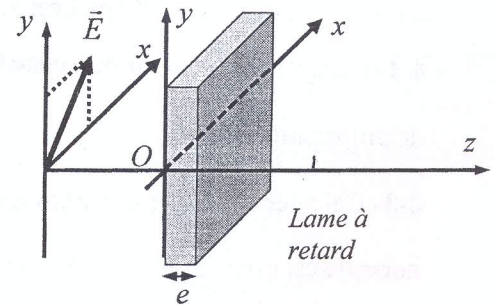


Figure 4

Le champ électrique incident associé à cette onde, s'écrit :

$$\vec{E}(z,t) = E_{0x} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z\right) \vec{u}_x + E_{0y} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z - \varphi_0\right) \vec{u}_y.$$

10-1- Préciser l'expression du champ électrique incident en $z=0$, puis le champ électrique transmis de la lame en $z=e$.

10-2- Montrer que la composante du champ électrique selon l'axe lent a un retard de phase supplémentaire $\Delta\varphi$ fonction de e , λ , n_x et n_y par rapport à la composante selon l'axe rapide. Définir les lignes neutres de la lame et décrire une expérience permettant de les déterminer.

11- Donner la définition d'une lame demi-onde et d'une lame quart d'onde notées respectivement D et Q . Calculer l'épaisseur minimale d'une lame de calcite D pour une longueur d'onde $\lambda = 600 \text{ nm}$ sachant que les indices de réfraction sont : $n_y = 1,658$ et $n_x = 1,486$.

Calculer l'épaisseur minimale d'une lame de quartz D pour la même longueur d'onde $\lambda = 600 \text{ nm}$ sachant que les indices de réfraction sont : $n_y = 1,544$ et $n_x = 1,543$. Comparer les résultats et conclure.