

## Devoir de Physique du fin du 1<sup>er</sup> Semestre (Durée : 4 H)

### Instructions générales :

- L'épreuve est constituée de deux parties A et B indépendantes.
- Dans chaque problème, certaines parties sont indépendantes. Un candidat peut toujours se servir d'un résultat fourni par l'énoncé pour continuer sa composition.
- On veillera à une présentation claire et soignée des copies. Il convient en particulier d'indiquer avec précision les références des questions

## **PARTIE A : Mécanique des fluides**

### **Problème 1 :**

Dans ce problème, l'atmosphère terrestre est supposée isotherme et que les molécules d'air sont toutes identiques et obéissent au modèle des gaz parfaits. L'air, de masse volumique  $\rho$ , sera toujours considéré en équilibre thermodynamique local.

1. Établir l'équation fondamentale de la statique des fluides :  $P + \rho g z = C^{te}$ .

2. En déduire les positions des plans isobares.

3. Soit  $n(z)$  le nombre de particules par unité de volume à l'altitude  $z$  et  $n_0 = n(z=0)$  celui au niveau du sol.

On désignera par  $P(z)$  la pression à l'altitude  $z$  (Figure 1).

3.1. Écrire l'équilibre mécanique d'une tranche d'épaisseur  $dz$  de surface  $S$  comprise entre les altitudes  $z$  et  $z+dz$ .

En déduire que  $P(z)$  peut s'écrire sous la forme :  $P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right)$ .

Avec :  $P_0 = P(z=0)$ ,  $M$  est la masse molaire des molécules d'air de l'atmosphère,  $g$  la constante de pesanteur,  $R$  la constante des gaz parfaits et  $T$  la température.

3.2. Établir l'expression de la masse volumique  $\rho(z)$  en fonction de  $z$ ,  $g$ ,  $T$ , de la constante de Boltzmann  $k_B$  et la masse  $m$  d'une particule. Donner l'interprétation énergétique de cette expression en déduire le facteur de Boltzmann.

3.3. En déduire l'expression de  $n(z)$ .

3.4. Représenter l'allure de l'évolution de  $n(z)$  pour deux températures  $T_1$  et  $T_2$  avec  $T_1 < T_2$ . Interpréter les courbes obtenues.

### **Problème 2 :**

On considère un fluide parfait, incompressible et irrotationnel, de masse volumique constante  $\rho$ , en écoulement permanent autour d'un cylindre circulaire de rayon  $R$ , de longueur très grande devant  $R$  (écoulement bidimensionnel).

Loin du cylindre, la pression du fluide est  $p_\infty$  et le fluide est animé d'une vitesse uniforme  $\vec{U}_\infty$  dirigée selon l'axe  $(Ox)$  (Figure 2).

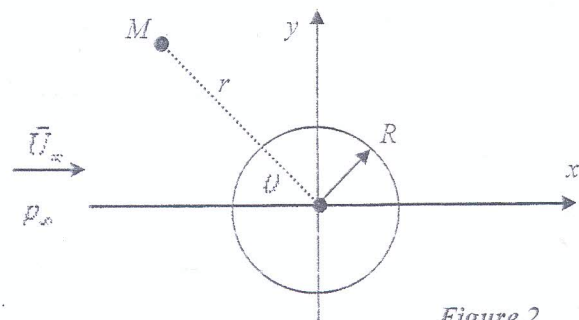


Figure 2



On note  $(r, \theta)$  les coordonnées polaires centrées sur le cylindre, avec  $\theta = 0$  dans la direction de l'écoulement incident.

Le potentiel de vitesse  $\varphi(r, \theta)$  associé à cet écoulement est donné par :

$$\varphi(r, \theta) = U_{\infty} \left( r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta.$$

### I. Étude du champ de vitesse de l'écoulement :

1. Montrer que  $\varphi(r, \theta)$  vérifie bien l'équation de Laplace  $\Delta \varphi(r, \theta) = 0$ , caractéristique d'un écoulement potentiel incompressible.
2. Déterminer les composantes de la vitesse  $(v_r, v_{\theta})$  en coordonnées polaires.
3. Vérifier que la condition d'imperméabilité sur la paroi du cylindre est satisfaite :  $v_r(r = R, \theta) = 0$ .
4. Déterminer l'expression de la vitesse tangentielle à la surface du cylindre :  $v_{\theta}(r = R, \theta)$ .
5. Identifier la position des points à vitesse extrême de l'écoulement.

### II. Distribution de pression sur la paroi du cylindre

6. En utilisant la loi de Bernoulli, exprimer la pression  $p(R, \theta)$  sur la paroi du cylindre en fonction de  $\theta$ .
7. Montrer que la pression est maximale aux points d'arrêt et minimale aux points de vitesse maximale.
8. Tracer qualitativement la répartition de  $p(R, \theta)$  en fonction de  $\theta$ .

### III. Force exercée par le fluide sur le cylindre

9. En utilisant la distribution de pression obtenue, déterminer la force totale exercée par le fluide sur le cylindre.
10. Conclure sur le résultat en comparant avec le paradoxe de d'Alembert.
11. Discuter physiquement la limite de ce résultat dans le cas d'un fluide réel visqueux.

### IV. Écoulement parfait autour d'un cylindre en rotation (effet Magnus)

Le cylindre tourne autour de son axe avec une vitesse angulaire  $\vec{\Omega}$  (positive si la rotation est antihoraire). On modélise l'écoulement autour du cylindre comme un écoulement potentiel. On admet que le potentiel de vitesse général pour un écoulement uniforme perturbé par un cylindre en rotation s'écrit sous la forme :

$$\varphi(r, \theta) = U_{\infty} \left( r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta, \text{ où } \Gamma \text{ est la circulation imposée. On admet également}$$

que la vitesse tangentielle du fluide à la surface du cylindre est donnée par la condition de glissement parfait, et que la circulation correspondante est :  $\vec{\Gamma} = 2\pi R^2 \vec{\Omega}$ .

12. Déterminer les composantes du champ de vitesse  $v_r(r, \theta)$  et  $v_{\theta}(r, \theta)$  à partir du potentiel donné et vérifier que la condition d'imperméabilité à la surface du cylindre ( $v_r(r = R, \theta) = 0$ ) est toujours satisfaite.
13. Déterminer l'expression de la vitesse tangentielle  $v_{\theta}(r = R, \theta)$  du fluide au contact du cylindre. Discuter l'influence du signe de  $\Omega$  et déterminer les nouvelles positions des points à vitesse extrême.
14. En déduire l'expression de la pression  $p(R, \theta)$  sur la paroi.

15. Représenter qualitativement la variation de  $p(R, \theta)$  en fonction de  $\theta$  pour différents signes de  $\Omega$ .

16. Montrer que la résultante des forces de pression est :  $\vec{F} = - \int_{\theta=0}^{2\pi} p(R, \theta) R d\theta \vec{n}$  où  $\vec{n}$  est la normale extérieure au cylindre.

16.a. Dédurre l'expression finale de la force exercée sur le cylindre et montrer qu'elle est donnée par :  $\vec{F} = -\rho U_{\infty} \Gamma \vec{u}_z \wedge \vec{U}_{\infty}$ .

16.b. Interpréter physiquement le sens de cette force en fonction du signe de  $\Omega$ . Faire un schéma.

17. Application numérique : pour  $R = 5 \text{ cm}$ ,  $\Omega = 200 \text{ rad s}^{-1}$ ,  $U_{\infty} = 20 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\rho = 1,2 \text{ kg m}^{-3}$  :

17.a. Calculer  $\Gamma$ .

17.b. Calculer la portance par unité de longueur  $|\vec{F}|$ .

Données utiles :  $\overrightarrow{\text{grad}} f(r, \theta, z) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$ .

## **PARTIE B : Physique des Ondes**

### **Problème I : Propagation d'ondes mécaniques dans une Chaîne unidimensionnelle infinie d'oscillateurs harmoniques.**

Un réseau cristallin unidimensionnel est modélisé par une chaîne linéaire infinie d'atomes identiques disposés suivant l'axe  $(Ox)$ . Les atomes sont assimilés à des points matériels de même masse  $m$  reliés entre eux par des liaisons métalliques modélisées à des ressorts de raideur  $K$ . A l'équilibre, ils sont séparés de la distance  $a$  et l'atome du rang  $n$  a pour abscisse  $x_n = na$ .

On suppose que l'atome de rang  $n$  n'interagit qu'avec ses deux plus proches voisins auxquels il est relié élastiquement par une force de rappel. On note  $u_n(t)$  le déplacement longitudinal algébrique par rapport à la position d'équilibre de l'atome de rang  $n$  avec  $|u_n(t)| \ll a$  (figure 3).

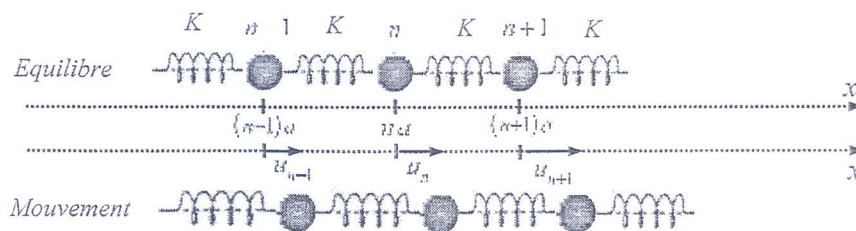


Figure 3

L'action de la pesanteur est négligée devant les forces de rappel mises en jeu.

1- Montrer que l'équation du mouvement de l'atome du rang  $n$ , s'écrit sous la forme :

$$\frac{d^2 u_n(t)}{dt^2} + \frac{K}{m} (u_n(t) - u_{n-1}(t)) + \frac{K}{m} (u_n(t) - u_{n+1}(t)) = 0.$$

L'équation obtenue peut être nommée l'équation de propagation. Justifier cette appellation.

On cherche des solutions, en notation complexe, sous la forme  $u_n(t) = U_0 \exp j(\omega t - nka)$ , où  $U_0$  est une constante positive.

2- Que représente les grandeurs  $U_0$ ,  $\omega$  et  $k$  ?

3- Montrer que  $\omega$  et  $k$  sont liés par la relation  $\omega^2 = \frac{4K}{m} \sin^2 \left( \frac{ka}{2} \right)$ . Indiquer son nom.



4- Préciser la parité de la fonction  $\omega(k)$  et donner sa signification physique.

5- Étudier la périodicité de la fonction  $\omega(k)$ . Pour l'étude de sa variation, montrer qu'on peut se limiter au domaine :  $-\frac{\pi}{a} \leq k \leq \frac{\pi}{a}$ .

6- Tracer le graphique de  $\omega = \omega(k)$  dans l'intervalle  $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right]$ .

7- Donner l'expression de la pulsation maximale  $\omega_m$  des ondes mécaniques qui peuvent se propager le long de la chaîne d'atomes.

8- Exprimer le rapport du déplacement  $\frac{u_{n+1}(t)}{u_n(t)}$  de deux masses successives. Préciser,

dans le cas où  $\omega = \omega_m$ , la nature de l'évolution des atomes les uns par rapport aux autres.

9- Déterminer l'expression de la vitesse  $v(k)$  de l'onde mécanique le long de la chaîne d'atomes dans les cas limites suivants :  $ka \rightarrow 0$  et  $ka \rightarrow \pi$ . Commenter.

### 10- Application numérique

10-1- Calculer la fréquence maximale  $f_m$  pour  $a = 4 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ ,  $m = 2 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$  et  $K = 25 \text{ Nm}^{-1}$ . Que vaut la longueur d'onde  $\lambda_m$ ? Commenter.

10-2- On estime à  $f_\ell = \frac{f_m}{100}$  la fréquence en dessous de la quelle la relation  $\omega(k)$  peut être considérée comme linéaire. Donner dans cette situation l'expression  $\omega(k)$  et calculer la célérité  $c_\ell$  des ondes mécaniques ainsi que la longueur d'onde  $\lambda_\ell$  correspondante.

### 11- Approximation des milieux continus

11-1- Dans le cas où  $k \ll \frac{\pi}{a}$ , justifier que le déplacement  $u_n(t) = u(x = na, t)$  puisse être représenté par une fonction continue  $u(x, t)$  où la variable  $x$  désigne l'emplacement d'un atome à l'équilibre.

11-2- En faisant un développement de Taylor à l'ordre 2 pour  $u_{n-1}(t) = u(x = (n-1)a, t)$  et  $u_{n+1}(t) = u(x = (n+1)a, t)$  autour de la valeur de  $x = na$ , montrer que  $u(x, t)$  est une solution

de l'équation de la forme  $c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0$ , avec  $c$  est une constante.

Comment s'appelle cette équation ? Que représente  $c$  ?

### 12- Etude énergétique

Dans cette partie, il est utile d'utiliser la notation réelle  $u_n(t) = U_0 \cos(\omega t - nka)$ .

12-1- On définit la densité linéique de l'énergie cinétique  $e_c(t)$  comme le rapport de l'énergie cinétique d'un oscillateur par la longueur  $a$  de la maille. Montrer que la moyenne temporelle de l'énergie cinétique linéique, s'écrit :  $\langle e_c(t) \rangle = \frac{K}{a} U_0^2 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$ .

12-2- De même, on désigne par  $e_p(t)$  la densité linéique de l'énergie potentielle. Elle est définie par la demi-somme des énergies potentielles des deux liaisons de l'atome du rang  $n$  avec les mailles du rang  $n-1$  et du rang  $n+1$  qui se manifestent respectivement par les

forces de rappel (conservatives)  $\vec{F}_{n-1} = -K(u_n(t) - u_{n-1}(t))\vec{u}_x$  et  $\vec{F}_{n+1} = -K(u_n(t) - u_{n+1}(t))\vec{u}_x$ . Elle s'écrit :  $e_p(t) = \frac{1}{2} \frac{E_{p(n,n-1)}(t) + E_{p(n,n+1)}(t)}{a}$ .

Déterminer la moyenne temporelle de l'énergie potentielle  $\langle e_p(t) \rangle$  et la comparer à  $\langle e_c(t) \rangle$ .

**12-3-** On désigne par  $e(t) = e_c(t) + e_p(t)$  l'énergie mécanique linéique de la chaîne d'atomes. Déterminer sa moyenne temporelle  $\langle e(t) \rangle$ .

**12-4-** On admet que le flux d'énergie mécanique représentant la puissance transférée d'une maille à sa suivante grâce à la force de rappel  $\vec{F}_{n-1}$ , s'écrit :  $\mathcal{P}(t) = -\vec{F}_{n-1} \cdot \vec{v}_n$ , où  $\vec{v}_n$  est le vecteur vitesse du  $n^{\text{ième}}$  l'atome. Déterminer l'expression de  $\mathcal{P}(t)$  et montrer que sa moyenne temporelle s'écrit sous la forme :  $\langle \mathcal{P}(t) \rangle = K U_0^2 \sqrt{\frac{K}{m}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \sin(ka)$ .

**12-5-** En déduire l'expression de la vitesse de propagation de l'énergie mécanique  $v_e$  de long de chaîne d'atomes. Conclure.

## **Problème II : Quelques aspects de la physique des instruments de musique**

Les cordes des instruments de musique sont des fils cylindriques homogènes (généralement métallique), tendus entre deux points fixes séparés par une longueur  $L$ . Le rayon du fil cylindrique est  $a$  tel que  $a \ll L$ .

**1-** La corde de masse linéique  $\mu$  est tendue avec la tension  $T_0$ . Au repos la corde est rectiligne et parallèle à l'axe horizontal ( $Ox$ ).

On étudie les petits mouvements transversaux de la corde autour de sa position d'équilibre. On note  $y(x,t)$  le déplacement (ou ébranlement) du point de la corde à l'abscisse  $x$  à l'instant  $t$ . L'axe ( $Oy$ ) est l'axe vertical ascendant.

**1-1-** Montrer que l'équation aux dérivées partielles que vérifie l'ébranlement  $y(x,t)$ ,

$$\text{s'écrit : } T_0 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (*).$$

Qu'appelle-t-on cette équation ? Donner l'expression la célérité  $c$  des ondes transversales le long de la corde.

**1.2-** Calculer la célérité  $c$  de l'onde pour une corde en acier de masse volumique  $\rho_{\text{acier}} = 7800 \text{ kg m}^{-3}$ , de diamètre  $d = 1,2 \text{ mm}$  et soumise à la tension  $T_0 = 850 \text{ N}$ .

**2-** La corde est fixée à ses deux extrémités,  $x=0$  et  $x=L$ . On cherche une solution de l'équation différentielle précédente sous la forme d'une onde harmonique caractérisée par la pulsation  $\omega$  et la norme du vecteur d'onde  $k$ .

**2-1-** Qu'appelle-t-on onde stationnaire ? Montrer que les solutions en ondes stationnaires, physiquement acceptables, de l'équation (\*) sont de la forme :

$$y(x,t) = y_0 \cos(kx - \varphi) \cos(\omega t - \varphi').$$

Quelle est la relation entre  $\omega$  et  $k$  ?

**2-2-** Qu'appelle-t-on « modes propres » et « fréquences propres » de la corde ? Exprimer les fréquences propres  $f_n$  de la corde en fonction de  $n$ ,  $c$  et  $L$ . Donner l'expression de la solution  $y_n(x,t)$  correspondant au mode propre numéro  $n$ . Dessiner l'aspect de la corde à plusieurs instants bien choisis pour  $n=1$ ,  $n=2$  et  $n=3$ .



**2-3-** Pour un mode propre donné, définir les ventres et les nœuds de vibrations. Quelle est la distance entre deux ventres consécutifs ? Entre deux nœuds consécutifs ? Entre un ventre et un nœud consécutifs ?

### 3- Solution générale

On écrit la solution correspondant aux conditions aux limites  $y(x=0,t)=y(x=L,t)=0$  comme une superposition des modes propres :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

On donne les spectres calculés pour une corde pincée à la moitié de sa longueur puis au cinquième de celle-ci (figure 4), où  $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  :

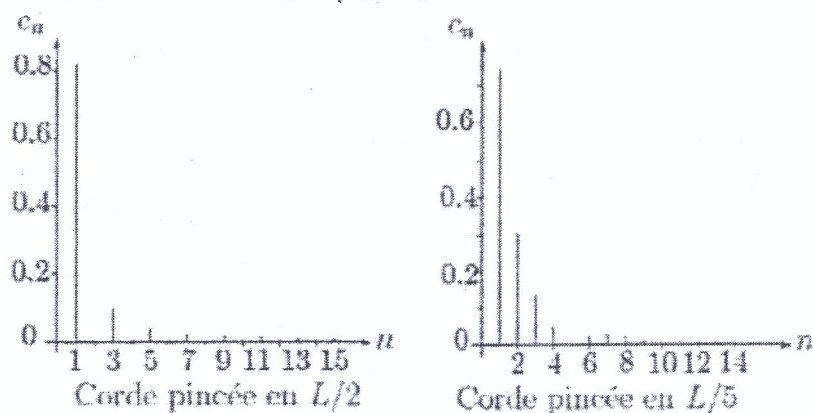


Figure 4

**3-1-** Comment peut-on expliquer l'absence de certains harmoniques dans ces spectres ?

On peut montrer que les coefficients  $a_n$  associés à la corde pincée décroissent globalement comme  $\frac{1}{n^2}$ . En revanche les amplitudes  $b_n$  des différents harmoniques de la corde frappée décroissent plutôt en  $\frac{1}{n}$  (au moins à partir d'une certaine valeur de  $n$ ).

**3-2-** Comparer alors les sons d'un clavecin (instrument à corde pincées) et d'un piano (instrument à corde frappées). Quel caractère du son est alors ressenti à l'oreille ?

### Conséquences sur la conception des cordes d'un piano

La caractéristique du son produit par une corde d'un instrument est spécifiée par la fréquence  $f_1$  de son mode fondamental  $n=1$ . Les 88 notes d'un piano se répartissent du «La 0» (fréquence fondamentale  $f = 28 \text{ Hz}$ ) au «Do 8» (fréquence fondamentale  $f = 4,2 \text{ kHz}$ ).

**4-** Ecrire la relation liant la longueur  $L$  d'une corde à la fréquence de son fondamental  $f_1$ .

On rappelle que pour la fréquence fondamentale  $f_1 = 262 \text{ Hz}$ , on a une longueur de corde  $L = 65 \text{ cm}$ . Quelles sont les valeurs extrêmes des longueurs de corde prévues dans l'extrême grave et dans l'extrême aigu ?

**5-** Les longueurs calculées ci-dessus ne sont pas réalisables en pratique (problèmes d'encombrement et de fragilisation de la structure à cette échelle) ; En pratique, la longueur d'un piano à queue de concert moderne n'excède pas  $3 \text{ m}$  (la longueur la plus courante étant autour de  $2,75 \text{ m}$ ). La longueur des cordes obéit assez bien à la loi étudiée à la question 4/ pour les notes au-delà du «Do 4». Pour les notes plus graves, on utilise des cordes filées : il s'agit de cordes d'acier, autour desquelles on a enroulé un fil de

cuiivre. La longueur de corde variant peu dans ce domaine du clavier, expliquer l'intérêt de ce procédé. Pourrait-on envisager de jouer sur la tension  $T_0$  des cordes ?

6- On donne la masse volumique du cuiivre :  $\rho_{Cu} = 8960 \text{ kg m}^{-3}$ . En assimilant l'enroulement de cuiivre à une couche homogène d'épaisseur  $e_{Cu} = 1 \text{ mm}$  recouvrant le cœur d'acier de diamètre  $d_{acier} = 1,6 \text{ mm}$ , et pour la tension  $T_0 = 850 \text{ N}$ , calculer la longueur de la corde du «La 0» (note la plus grave du piano, de fréquence fondamentale  $f = 28 \text{ Hz}$ ).