

Epreuve de mathématiques - Semestre N°2
Section : P.T.2

Durée : 4h

Date : 23 Mai 2019

Nbre de pages : 4

*N.B. Rédiger l'exercice et le problème 1 sur une feuille et le problème 2 sur une autre.***Exercice/**

Soient l'espace vectoriel $E = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \text{l'application } t \mapsto f^2(t) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}\}$
et l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $E \times E$ définie par :

$$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

On admet que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2k} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{(2k)!}{k! 2^k} \sqrt{2\pi}$.

1) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

2) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t^2 - xt - y)^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

(a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y + 3$.

(b) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ puis déduire que f admet un unique point critique.

(c) Montrer que f présente un minimum local en $(0, 1)$.

(d) Montrer que f présente un minimum global en $(0, 1)$ que l'on déterminera.

(e) En déduire la distance entre le polynôme X^2 et le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$.

3) On pose l'application $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $g(x, y, z) = f(x, y) - z$ et la surface Σ de $\mathbb{R}^3$ définie par $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / g(x, y, z) = 0\}$.

(a) Vérifier que $A = (0, 1, 2)$ est un point régulier de Σ .

(b) Déterminer l'équation du plan P tangent à Σ au point A .

Problème 1/

On désigne dans tout le problème par :

- $\mathcal{M}_{n,1}$ l'espace des vecteurs réelles colonnes à n coefficients. On note $0_{n,1}$ le vecteur nul.

- $\mathcal{M}_n$ l'espace des matrices réelles carrées d'ordre n . On note 0_n la matrice nulle.
- tA la transposée d'une matrice A .
- $\mathcal{S}_n$ le sous espace de $\mathcal{M}_n$ des matrices symétriques A vérifiant ${}^tA = A$.
- I_n la matrice identité d'ordre n .
- $\mathcal{O}_n$ l'ensemble des matrices orthogonales c'est à dire les matrices P telles que ${}^tP \cdot P = I_n$.

- $\langle X, Y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ le produit scalaire canonique des deux vecteurs colonnes

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

- $Sp(M)$, le spectre d'une matrice carrée M .

On rappelle que si $A \in \mathcal{M}_n$, alors, $\langle AX, Y \rangle = {}^t(AX)Y = \langle X, {}^tAY \rangle$.

Définitions :

- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ est dite positive si, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}$, on a $\langle AX, X \rangle \geq 0$.
- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ est dite définie si, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}$, on a $\langle AX, X \rangle = 0$, alors, $X = 0_{n,1}$.
- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ est dite définie positive si, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1} \setminus \{0_{n,1}\}$, on a $\langle AX, X \rangle > 0$.

Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n .

1. On rappelle que puisque A est une matrice symétrique réelle, alors, il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ formée de vecteurs propres de A .
 - (a) Montrer que si A est positive alors $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$
 - (b) En utilisant la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, montrer que si $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$, alors, A est positive.
2. (a) Montrer que si $\ker(A) \neq \{0_{n,1}\}$ alors, A n'est pas définie.
 - (b) Dédire que A est définie positive si et seulement si, A est positive et inversible.
 - (c) Justifier que si A est positive, alors, il existe $P \in \mathcal{O}_n$ telle que

$${}^tPAP = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

où les λ_i sont des réels positifs.

(d) Dédire que pour toute matrice symétrique définie positive A , il existe une matrice symétrique, définie et positive C telle que $C^2 = A$.

3. Soit A et C deux matrices symétriques définies positives telles que $C^2 = A$.

(a) Montrer que pour toute valeur propre λ de A , on a

$$\ker(A - \lambda I_n) = \ker(C - \sqrt{\lambda} I_n).$$

(b) Dédire que toute base de vecteurs propres de A est aussi une base de vecteurs propres de C .

(c) Dédire que pour toute matrice symétrique définie positive A , il existe une unique matrice symétrique définie positive C telle que $C^2 = A$.

On notera $C = A^{1/2}$.

(d) **Application** : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

i-) Montrer que A est symétrique définie et positive.

ii-) Donner une base orthonormée de vecteurs propres de A .

iii-) Trouver $A^{1/2}$.

4. Soit A une matrice symétrique définie positive.

(a) Montrer que A^{-1} est symétrique et définie positive.

(b) Dédire que $(A^{1/2})^{-1} = (A^{-1})^{1/2}$.

5. (a) Montrer que si f et g sont deux endomorphismes diagonalisables qui commutent, alors, il existe une base commune formée de vecteurs propres de f et g .

(b) Soient A et B deux matrices symétriques définies positives telles que $AB = BA$.

i-) Justifier qu'il existe une base orthonormée formée de vecteurs propres communs de A et B .

ii-) En déduire que $A^{1/2}$ et $B^{1/2}$ commutent.

Problème 2/

Partie 1 :

Pour tout couple (n, r) d'entiers naturels tel que $1 \leq r < n$, on rappelle la formule du " triangle de Pascal " : $C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^r$.

1. Soit r un entier naturel. On considère la série entière $\sum_{n \geq r} C_n^r x^n$.

(a) Montrer que le rayon de convergence de cette série entière vaut 1.

Pour tout réel $x \in]-1, 1[$, on pose : $f_r(x) = \sum_{n=r}^{+\infty} C_n^r x^n$.

(b) Montrer que $\forall x \in]-1, 1[$ et $r \geq 1$, on a

$$(1-x)f_r(x) = xf_{r-1}(x)$$

2. Soit x un réel fixé de $] -1, 1[$. Déterminer f_0 puis f_1 en fonction de x .

3. Montrer par récurrence que :

$$\forall r \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1, 1[, f_r(x) = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$$

4. Soit $r \in \mathbb{N}^*$, montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq r} \frac{1}{n} C_{n-1}^{r-1} x^n$ vaut 1.

5. Pour $r \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1, 1[$, on pose $h_r(x) = \sum_{n=r}^{+\infty} \frac{1}{n} C_{n-1}^{r-1} x^n$.

(a) Montrer que h_r est de classe C^1 sur $] -1, 1[$ et que pour tout réel x de $] -1, 1[$, on a : $h_r'(x) = f_{r-1}(x)$.

(b) En déduire que, pour tout x de $] -1, 1[$, on a $h_r(x) = \int_0^x \frac{t^{r-1}}{(1-t)^r} dt$.

(c) Montrer que :

$$h_r(x) = \int_0^{\frac{x}{1-x}} \frac{y^{r-1}}{1+y} dy, \forall x \in]-1, 1[.$$

(d) En déduire que :

$$h_r(x) = \frac{x^r}{r(1-x)^{r-1}} + \frac{1}{r} \int_0^{\frac{x}{1-x}} \frac{y^r}{(1+y)^2} dy, \forall x \in]-1, 1[.$$

Partie 2 :

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans cette partie sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On rappelle que la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est définie pour tout réel t où la série $\sum t^k \mathbb{P}(X = k)$ converge absolument par :

$$g_X(t) := E(t^X) = \sum_{k \in X(\Omega)} t^k \mathbb{P}(X = k).$$

Soit p un réel de $]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$, et on considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, qui suit la loi géométrique de paramètre p . On rappelle que pour tout entier k de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = pq^{k-1}$.

1. Donner l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X .
2. Montrer que la fonction génératrice de la variable aléatoire X est donnée par :

$$g_X(t) = \frac{pt}{1-qt}; \forall t \in]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[.$$

3. On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendantes, de même loi géométrique de paramètre p . Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

(a) Calculer l'espérance $E(S_n)$ et la variance $V(S_n)$ de la variable aléatoire S_n .

(b) Montrer que la fonction génératrice de la variable aléatoire S_n est donnée par

$$\forall t \in]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[; g_{S_n}(t) = \frac{p^n}{q^{n-1}} t f_{n-1}(qt).$$

(c) En déduire que

$$\forall t \in]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[; g_{S_n}(t) = \sum_{k=n}^{+\infty} C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n} t^k.$$

(d) En déduire que la loi de probabilité de la variable aléatoire S_n est donnée par

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < k < n \\ C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n} & \text{si } k \geq n \end{cases}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \frac{n}{S_n}$.

(a) Montrer que $E(Y_n) = n \left(\frac{q}{p}\right)^n h_n(q)$.

(b) Montrer que $E(Y_n) - p = \left(\frac{q}{p}\right)^n \int_0^{\frac{p}{q}} \frac{y^n}{(1+y)^2} dy$.

(c) Montrer que $0 \leq E(Y_n) - p \leq \frac{q}{p(n+1)}$.

(d) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Y_n)$.