

L'énoncé de cette épreuve comporte 8 pages

L'usage de la calculatrice est autorisé

Le présent problème propose l'étude de quelques aspects des milieux conducteurs soumis à l'action d'un champ électrique variable dans le temps. Il est composé de trois parties largement indépendantes entre elles.

Données pour toute l'épreuve

- Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3 \times 10^8 m.s^{-1}$
- Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} H.m^{-1}$
- Permittivité électrique du vide : $\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$
- Nombre d'AVOGADRO : $N_A = 6.02 \times 10^{23} mol^{-1}$
- Charge élémentaire : $e = 1.6 \times 10^{-19} C$
- Masse de l'électron : $m = 9.1 \times 10^{-31} kg$

On rappelle les équations de Maxwell dans le vide en présence de charges ρ et de courants $\vec{j}$, la loi de conservation de la charge électrique ainsi que la relation de l'analyse vectorielle pour un champ vectoriel $\vec{A}$:

$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\text{div} \vec{B} = 0$	$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$
$\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$	$\text{rot}(\text{rot} \vec{A}) = \text{grad}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$

1^{ère} Partie : Conduction électrique dans un milieu matériel

On considère un milieu matériel homogène de dimension supposée infinie. La conduction électrique dans un tel milieu est due au déplacement des porteurs de charges. On note n la densité volumique des porteurs de charges susceptibles de se déplacer sous l'action d'un champ électrique $\vec{E}(M, t)$. On suppose que chaque porteur de charge est de masse m et possède une charge q .

Dans la suite, le poids du porteur de charge et la force d'origine magnétique seront négligés.

Conductivité électrique d'un milieu matériel

En plus de l'action du champ électrique, on modélise l'interaction d'un porteur de charge avec le reste du milieu par :

- Une force d'amortissement visqueux : $\vec{F}_a = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$
- Une force de rappel : $\vec{F}_r = -m\omega_0^2 \vec{r}$

$\vec{r}$ étant le vecteur position du porteur de charge, mesuré par rapport à sa position d'équilibre et $\vec{v}$ sa vitesse par rapport à un référentiel lié au milieu matériel. La constante τ est la durée caractéristique de la relaxation des vitesses.

1. En appliquant la loi fondamentale de la dynamique, écrire l'équation du mouvement du porteur de charge dans le milieu matériel.

Le milieu est soumis à un champ électrique sinusoïdal de pulsation ω : $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$, auquel on associe le champ complexe : $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 \exp(i\omega t)$, i étant le nombre complexe tel que $i^2 = -1$

2. Déterminer l'expression complexe de la vitesse $\vec{v}$ du porteur de charge en régime sinusoïdal établi de pulsation ω .

3. Ecrire l'expression de la densité volumique de charge ρ associée aux porteurs mobiles en fonction de n et q .

4. On admet que la densité de courant $\vec{j}$ est liée à la vitesse par la relation $\vec{j} = \rho \vec{v}$. Ecrire l'expression de la densité de courant $\vec{j}$ en fonction de n , q et $\vec{v}$.

5. A partir de l'expression complexe de la vitesse, donner l'expression complexe de la densité volumique de courant $\underline{\vec{j}}$.

6. En déduire qu'en régime établi, on peut écrire la loi d'Ohm sous la forme $\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma} \cdot \underline{\vec{E}}$. Montrer alors que ce modèle permet de définir une conductivité complexe :

$$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + i\omega\tau(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2})} \quad (1)$$

Où γ_0 est la conductivité statique dont on donnera l'expression en fonction de n , q , τ et m .

Etude d'un milieu conducteur

On considère que le milieu matériel est un milieu conducteur pour lequel les porteurs de charges sont supposées libres de se déplacer dans le milieu matériel, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas soumis à la force de rappel ($\omega_0 = 0$).

7. Donner l'expression de la conductivité électrique complexe d'un milieu conducteur.

8. Montrer que la conductivité complexe peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{\gamma} = \gamma_1 - i\gamma_2 \quad (2).$$

Donner les expressions de γ_1 et γ_2 en fonction de ω , τ et γ_0 .

Dans le cas du cuivre, chaque atome libère un seul électron qui participe à la conduction électrique. La masse volumique du cuivre est $\rho_{Cu} = 8,9 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, la masse molaire du cuivre est $M_{Cu} = 63,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

9. Donner l'expression du nombre d'électrons de conduction par unité de volume n en fonction ρ_{Cu} , M_{Cu} et du nombre d'AVOGADRO N_A .

10. Déterminer la valeur numérique de n .

11. La conductivité du cuivre en régime statique est $\gamma_0 = 6 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$. Déterminer la valeur de la constante de temps τ .

12. Pour quel domaine de fréquence on a $\omega\tau \ll 1$, on posera $f_1 = \frac{1}{2\pi\tau}$.

On suppose dans les questions suivantes que cette condition est vérifiée.

13. Donner les expressions approchées au premier ordre en $(\omega\tau)$ de γ_1 et de γ_2 .

14. Montrer qu'en notation réelle, le vecteur densité de courant est lié au vecteur champ électrique par la relation :

$$\vec{j} = \gamma_0 \cdot \vec{E} + \epsilon_0 \chi \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3)$$

Donner l'expression de χ en fonction de τ , γ_0 et ϵ_0 .

15. Ecrire l'équation de Maxwell-Ampère dans le milieu conducteur en admettant qu'elle a la même forme que celle du vide à condition d'utiliser la densité de courant donnée par la relation (3).

16. L'équation de Maxwell-Ampère précédemment écrite fait apparaître la somme de deux termes : le courant de conduction $\vec{j}_c$ et d'un courant dit de déplacement $\vec{j}_d$. En admettant que le courant de conduction a la même expression qu'en basses fréquences, identifier la densité de courant de déplacement $\vec{j}_d$.

17. Montrer que le rapport de l'amplitude du courant de conduction à celle du courant de déplacement est donné par :

$$\eta = \frac{j_c}{j_d} = \frac{\gamma_0}{\omega \epsilon_0 |1 + \chi|}$$

En fait, c'est le rapport η qui justifie le caractère isolant ou conducteur du matériau. Le milieu est conducteur si le courant de conduction prédomine ($\eta \gg 1$). Au contraire, si le courant de déplacement prédomine, le milieu se comporte comme un isolant.

18. Déterminer la pulsation ω_c pour laquelle le rapport η est égal à l'unité.

19. Déterminer $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$ pour le cuivre. Dans quel domaine du spectre électromagnétique cette fréquence est-elle située ? Que peut-on dire du cuivre dans le domaine du rayonnement électromagnétique visible ?

2^{ème} Partie : propagation d'ondes électromagnétiques dans les conducteurs ohmiques

Relation de dispersion dans un conducteur ohmique

On considère un conducteur ohmique pour lequel on suppose que la densité volumique de charge est nulle ($\rho = 0$) et le vecteur densité de courant est lié au champ électrique par la relation : $\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}$ avec une conductivité γ réelle ($\gamma = \gamma_0$).

20. Ecrire l'équation de Maxwell-Ampère pour un conducteur ohmique.

21. Etablir l'équation de propagation à laquelle satisfait le champ électrique.

Par la suite, on cherche les solutions complexes sous forme d'ondes monochromatiques planes se propageant selon l'axe Oz et polarisées rectilignement selon Ox :

$$\vec{E}(z, t) = E(z) \exp(i\omega t) \vec{e}_x$$

22. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $E(z)$.

On cherche les solutions de cette équation, de manière semblable à celle des ondes progressives, sous la forme :

$$\underline{E}(z) = E \exp(-ikz)$$

23. Avec le nombre d'onde (ou vecteur d'onde) k à priori complexe. Montrer que k vérifie l'équation :

$$\underline{k}^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 - i\omega \mu_0 \gamma \quad (4)$$

Plutôt que de décrire le cas général, nous allons discuter les deux cas limites correspondant aux situations où l'un des deux termes de k (équation 4) est négligeable devant l'autre.

Propagation dans un mauvais conducteur

Les mauvais conducteurs électriques, aussi appelés milieux à pertes, sont tels que : $\gamma \ll \varepsilon_0 \omega$

24. Déterminer l'expression approchée du vecteur d'onde k . Montrer que ce vecteur d'onde peut être exprimé, en fonction du vecteur d'onde $k_0 = \frac{\omega}{c}$ dans le vide et d'une longueur caractéristique l_p , sous la forme :

$$\underline{k} = k_0 - i \frac{1}{l_p}$$

Donner l'expression de l_p en fonction de ε_0 , μ_0 et γ .

25. Ecrire l'expression complexe du champ électrique $E(z, t)$ en tenant compte de la question 22.

26. En déduire l'expression réelle du champ électrique. Interpréter cette expression.

27. Montrer que la propagation de l'onde électromagnétique dans le conducteur s'accompagne d'une dissipation d'énergie. Que devient la puissance volumique perdue par l'onde électromagnétique ? Commenter l'expression de la distance d'absorption l_p .

Propagation dans les bons conducteurs : effet de peau

Pour les bons conducteurs, la situation est telle que $\gamma \gg \epsilon_0 \omega$ et on ne garde dans l'expression du nombre d'onde que le terme dominant.

28. Déterminer l'expression approchée du vecteur d'onde k . Montrer que ce vecteur d'onde peut être exprimé, sous la forme :

$$\underline{k} = \pm \frac{(1 - i)}{\delta}$$

29. Donner l'expression de δ en fonction de $\mu_0 \omega$ et γ_0 . Quel est le nom habituel de cette longueur caractéristique ?

30. Ecrire l'expression complexe du champ électrique $\underline{\vec{E}}(z, t)$ en tenant compte de la question 22. En déduire l'expression réelle du champ électrique. Commenter l'expression de la distance d'atténuation δ en fonction de ω .

31. Que pensez-vous de la propagation de l'énergie électromagnétique dans un bon conducteur ? Comparer au cas de la propagation dans un mauvais conducteur.

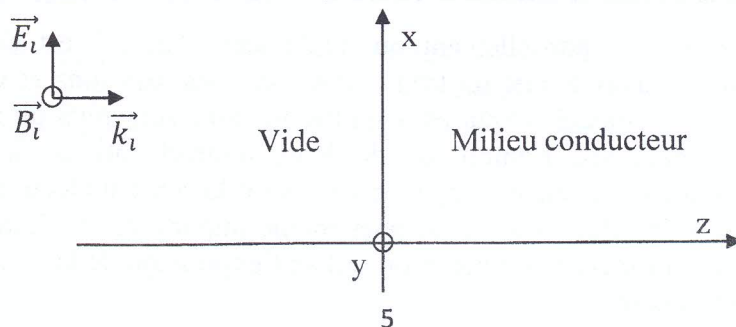
Afin de comparer le comportement de deux types de conducteurs étudiés ci-dessus vis-à-vis de l'énergie électromagnétique véhiculée par une onde électromagnétique incidente, nous allons étudier la réflexion d'une onde électromagnétique sur un conducteur.

Réflexion d'une onde électromagnétique par un conducteur réel

On considère que le demi espace $z < 0$ est vide tandis qu'un conducteur de conductivité γ occupe le demi espace $z > 0$. Une onde électromagnétique plane progressive harmonique de pulsation ω se propage dans le vide suivant la direction Oz , dans le sens des z croissants et polarisée rectilignement suivant Ox . Cette onde, appelée onde incidente, arrive sous incidence normale sur le milieu conducteur (voir figure). Une partie de l'énergie de l'onde est réfléchie, une autre est transmise. Il en résulte que dans le vide ($z < 0$), le champ est la superposition d'une onde incidente et d'une onde réfléchie :

$$\underline{\vec{E}}_v(z, t) = E_i \exp(i(\omega t - k_0 z)) \underline{\vec{e}}_x + E_r \exp(i(\omega t + k_0 z)) \underline{\vec{e}}_x$$

E_i et E_r désignent les amplitudes complexes des champs électriques des ondes incidente et réfléchie respectivement.



32. Déterminer les expressions des champs magnétique $\vec{B}_i(z, t)$ de l'onde incidente et $\vec{B}_r(z, t)$ de l'onde réfléchie. En déduire l'expression du champ magnétique résultant dans la région $z < 0$.

Dans le milieu conducteur ($z > 0$), comme nous considérons que celui-ci s'étend jusqu'à l'infini, seule la solution qui décroît exponentiellement vers la droite est acceptable. On écrit le champ électrique de l'onde transmise sous la forme :

$$\vec{E}(z, t) = E_t \exp(i(\omega t - kz)) \vec{e}_x$$

E_t étant l'amplitude complexe du champ électrique de l'onde transmise dans le milieu conducteur.

33. Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}_t(z, t)$ de l'onde transmise dans le conducteur.

34. Ecrire, sans démontrer, les conditions que doivent vérifier les champs électrique et magnétique sur l'interface entre le vide et le milieu conducteur.

35. Etablir les deux relations liant E_i , E_r et E_t .

Cas du mauvais conducteur

36. Dans le cas d'un mauvais conducteur, déterminer les expressions approchées des amplitudes E_r et E_t des champs électriques associés à l'onde réfléchie et à l'onde transmise par ce conducteur respectivement. On utilisera l'expression approchée de k établie dans le cas d'un mauvais conducteur.

37. Comparer E_r et E_t par rapport à l'amplitude E_i du champ électrique associé à l'onde. Commenter.

Cas du bon conducteur

38. Déterminer les expressions approchées, à l'ordre le plus petit non nul en $k_0 \delta$, des amplitudes E_r et E_t des champs électriques associés à l'onde réfléchie et à l'onde transmise dans le milieu conducteur respectivement.

39. Comparer E_r et E_t par rapport à l'amplitude E_i du champ électrique associé à l'onde incidente.

40. Conclure quant au comportement des deux types de conducteurs étudiés ci-dessus vis-à-vis de l'énergie électromagnétique véhiculée par une onde électromagnétique incidente.

3^{ème} Partie : propagation d'ondes électromagnétiques dans un plasma

Un plasma est un gaz partiellement ou totalement ionisé. C'est donc un milieu globalement neutre dans lequel on trouve des électrons, des ions et éventuellement des atomes ou des molécules neutres. Comme les ions sont plus de mille fois plus lourds que les électrons, l'amplitude de leurs mouvements et donc le courant électrique qui leur est associé est négligeable devant le courant électronique. Pour les plasmas, l'inertie des électrons est un phénomène important, on s'intéresse donc au cas plus général où l'inertie compte et on utilise l'expression de la densité de courant donnée par l'expression :

$$\vec{j} = \frac{ne^2\tau}{m(1 + i\omega\tau)} \vec{E} \quad (5)$$

n étant la densité volumique des électrons libres.

On peut distinguer deux régimes : les basses fréquences, où la dissipation est dominante et les hautes fréquences où les effets d'inertie deviennent dominants et des nouveaux phénomènes apparaissent.

Dynamique d'un plasma libre

41. En utilisant la relation (5) montrer que l'équation d'évolution dans le temps de la densité volumique de courant $\vec{j}$ s'écrit sous la forme :

$$\vec{j} + \tau \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{ne^2\tau}{m} \vec{E}$$

42. En utilisant la relation de la conservation de la charge électrique et des équations de Maxwell, montrer que la densité volumique de charge ρ obéit à l'équation d'évolution suivante :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \omega_p^2 \rho = 0 \quad (6)$$

τ est le temps caractéristique d'amortissement de la vitesse et ω_p une pulsation appelée pulsation plasma. Montrer que ω_p est donnée par :

$$\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\epsilon_0}$$

43. Pour des faibles densités électroniques, la pulsation plasma est faible et le terme d'amortissement prédomine dans l'équation précédente. Prévoir l'évolution dans le temps de la densité volumique de charge ρ .

44. Pour une densité électronique importante et une faible dissipation c'est-à-dire on a ($\frac{1}{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} \ll \omega_p^2 \rho$), donner une forme approchée de l'équation (6). Montrer que le plasma est le siège d'oscillations dont on donnera la pulsation.

Propagation d'ondes dans un plasma

Comme dans un plasma la densité locale de charge peut être différente de zéro, la divergence du champ électrique n'est pas nécessairement nulle. On distinguera deux types d'ondes : les ondes transverses pour lesquelles $\text{div} \vec{E} = 0$, et les ondes longitudinales. Dans la suite, on ne considérera que les ondes transverses.

Le plasma sera considéré comme un milieu dilué dont les charges sont sans interactions entre elles. Nous admettons que la densité de courant est liée au champ électrique par la relation approchée suivante :

$$\vec{j} = \frac{ne^2}{im\omega} \vec{E}$$

45. Ecrire l'expression de la densité de courant $\vec{j}$ en fonction de ω , ω_p , ϵ_0 et $\vec{E}$

Relation de dispersion

On considère une onde se propageant dans le plasma suivant la direction Oz dont l'expression complexe du champ électrique associé est :

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 \exp(i(\omega t - kz))$$

46. Déterminer l'équation de propagation à laquelle obéit le champ électrique $\vec{E}$.

47. Montrer que la relation de dispersion liant k à ω s'écrit sous la forme suivante :

$$k^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_p^2)$$

La pulsation plasma ω_p sépare deux zones de fréquence où le plasma a des comportements très différents.

Domaine des basses fréquences ($\omega < \omega_p$)

48. Déterminer l'expression du vecteur d'onde k dans le domaine des basses fréquences.

49. Déterminer l'expression du champ électrique dans le cas des basses fréquences. Comment peut-on qualifier l'onde électromagnétique associée ? Montrer que pour de telles fréquences, il n'y a aucune propagation dans le plasma et que ce milieu réfléchit parfaitement les ondes électromagnétiques.

50. Dans l'ionosphère (partie de l'atmosphère située à quelques centaines de kilomètres d'altitude qui est partiellement ionisée), la densité en électrons libres est de l'ordre de $n = 10^{10}$ électrons par m^3 . Quel est le domaine de fréquence correspondant aux ondes électromagnétiques réfléchies par l'ionosphère ?

Domaine des hautes fréquences ($\omega > \omega_p$)

51. Déterminer l'expression du vecteur d'onde k dans le domaine des hautes fréquences.

52. Déterminer l'expression du champ électrique dans le cas des hautes fréquences.

53. Quelle est la nature de l'onde correspondante.

54. Déterminer sa vitesse de phase v_ϕ

55. tracer $v_\phi(\omega)$ et commenter.