



ÉPREUVE DE PHYSIQUE DU SECOND SEMESTRE

MP2 – T2

27 Juillet 2020

Durée : 3h

EXERCICE 1 : THERMODYNAMIQUE (DC)

On se propose d'étudier la conduction thermique dans une barre homogène cylindrique d'axe Oz de rayon a et de longueur L . On désigne par λ sa conductivité thermique, par ρ sa masse volumique, par c sa capacité thermique massique et γ sa conductivité électrique. Les grandeurs λ , ρ , γ et c sont supposées uniformes et indépendantes de la température à tout instant.

La surface latérale est parfaitement calorifugée de telle sorte que l'on peut négliger les transferts thermiques à travers cette surface.

1. En effectuant un bilan sur une tranche du cylindre de longueur dz , entre les instants t et $t + dt$, montrer que l'équation de diffusion thermique s'écrit : $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$.

2. Grâce à un système de chauffage, on impose le profil de température suivant :

$$T(z, t = 0) = T_0 + \theta_0 \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right); T_0 \text{ et } \theta_0 \text{ sont des constantes positives.}$$

Pour $t > 0$, on cherchera une solution sous la forme : $T(z, t) = T_0 + \theta(t) \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)$.

2.a. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la fonction $\theta(t)$. On introduira une constante τ , homogène à un temps.

2.b. Résoudre cette équation et en déduire la solution $T(z, t)$.

2.c. Tracer les allures des courbes donnant la température en fonction de z pour les différents instants $t = 0$; $t = \tau$ et $t \rightarrow \infty$. Quelle est la signification physique de τ ?

On considère, à présent, que la barre cylindrique est parcourue par un courant électrique de densité volumique uniforme $\vec{j} = j_0 \vec{e}_z$ donnant naissance à un apport de chaleur par effet Joule. Les extrémités de la barre, en $z = 0$ et en $z = L$, sont maintenues respectivement aux températures constantes T_1 et T_2 , grâce à deux thermostats placés aux extrémités.

3. Déterminer la nouvelle équation de la diffusion thermique.

Dans la suite du problème, on travaille en régime permanent.

4. Déterminer la température $T(z)$ en tout point de la barre cylindrique.

5. Dans le cas $j_0 = 0$, définir et exprimer la résistance thermique R_{th} de la barre.
6. Pour $j_0 \neq 0$, exprimer la puissance $P(z)$ traversant, dans le sens des z croissant, une section droite d'abscisse z du cylindre.
7. En déduire les expressions des puissances thermiques P_1 et P_2 reçues par les deux thermostats. Écrire alors une relation entre P_1 , P_2 et la puissance P_J dissipée, par effet Joule, dans le cylindre, Commenter.
8. On impose, à présent, aux deux extrémités, $z = 0$ et $z = L$, une même température T_0 . Vérifier que la température s'écrit alors : $T(z) = T_0 + \alpha(Lz - z^2)$. Exprimer α en fonction de j_0 , γ et λ .
9. On désigne par T_F la température de fusion du matériau conducteur. Afin d'éviter la fusion, montrer que l'intensité du courant électrique parcourant le cylindre doit être inférieure à une valeur I_0 que l'on exprimera en fonction de T_0 , T_F , γ , λ , a et L .

EXERCICE 2 : OPTIQUE ONDULATOIRE (EFS)

Préliminaires

On considère deux sources ponctuelles cohérentes S_1 et S_2 repérées, respectivement, par leurs coordonnées $(a/2, 0, -D)$ et $(-a/2, 0, -D)$, émettant dans l'air deux ondes lumineuses de même longueur d'onde λ et d'intensités identiques $I_0 = s_0^2$.

La vibration lumineuse issue de chaque source s'écrit : $s_i(S_i, t) = s_0 \cos(\omega t)$, $i = 1; 2$.

Les deux vibrations lumineuses issues de S_1 et S_2 interfèrent en un point $M(x, y, 0)$ de l'écran placé à une distance D (voir Figure 1).

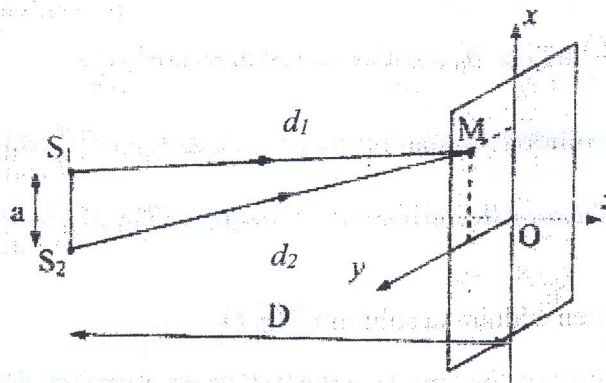


Figure 1

1. Déterminer les expressions des chemins optiques $\overline{S_1M}$ et $\overline{S_2M}$ en fonction de x , y , a et D .
2. Sachant que la distance D est tel que : $D \gg |x|$ et $D \gg |y|$, montrer que la différence de marche $\delta(M)$ ne dépend que de x .
3. Donner les expressions des vibrations lumineuses $s_1(M, t)$ et $s_2(M, t)$ qui interfèrent en M .
4. Déterminer l'expression de l'intensité lumineuse résultante $I(M)$.
5. Décrire brièvement la figure observée sur l'écran.

Fentes d'Young

On réalise, dans l'air, l'expérience des fentes d'Young à l'aide du dispositif schématisé sur la figure ci-dessous. Ces fentes très fines, distantes de $F_1F_2 = a$, sont éclairées par une onde monochromatique de longueur d'onde λ , provenant d'une fente source très fine F_s , placée au foyer principal objet d'une lentille convergente (L_1) de distance focale image f'_1 . Les trois fentes sont parallèles à l'axe (Oy). L'observation se fait sur un écran, de centre O, se trouvant dans le plan focal image d'une lentille convergente (L_2) de distance focale image f'_2 .

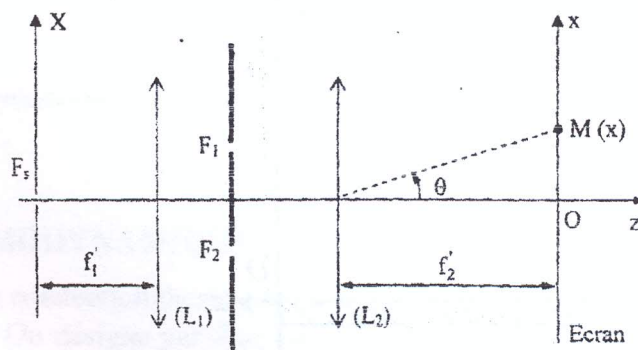
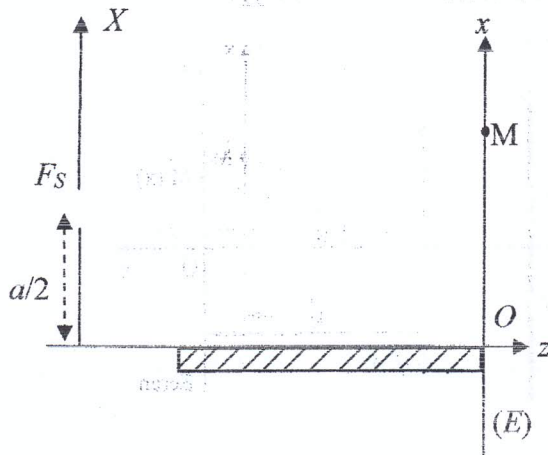


Figure 2

6. Tracer la marche de deux rayons issus de F_s et s'interférant au point M.
7. Déterminer la différence de phase $\varphi(M)$ entre deux vibrations associées à ces deux rayons.
8. En déduire l'expression de l'intensité lumineuse $I(x)$ au point M de l'écran.
9. Déterminer l'expression de l'interfrange i .
10. Représenter la fonction $I(x)$.
11. On intercale devant F_2 , une petite lame à faces parallèles d'épaisseur e et d'indice n supposé constant. Déterminer la nouvelle différence de marche entre les rayons qui interfèrent en M. Dans quel sens et de quelle distance d_0 la figure d'interférence est-elle tradatée ? Justifier.
12. La fente source F_s émet le doublet jaune de Sodium, formé de deux radiations monochromatiques de longueurs d'onde $\lambda_1 = 589,0 \text{ nm}$ et $\lambda_2 = 589,6 \text{ nm}$. On posera $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ et $\lambda = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
- 13.1. Calculer l'intensité $I(M)$ en un point de l'écran.
- 13.2. Déterminer l'expression du contraste C.
- 13.3. Pour quelles valeurs de x le contraste est-il maximal ? À quoi correspondent ces positions.
- 13.4. Pour quelles valeurs de x le contraste est-il nul ? À quoi correspondent ces positions.
- 13.5. Étudier et tracer l'allure de l'intensité $I(M)$.

Miroir de Lloyd

14. On éclaire un miroir plan (confondu avec le plan xOy) au moyen d'une fente lumineuse F_S , monochromatique, de grande longueur selon Oy , de largeur b selon Ox , dont le centre est disposé à la distance $a/2$ du miroir. On observe le phénomène sur un écran (E) placé dans plan xOz à grande distance $D \gg a$ de la fente source.



- 14.1. Expliquer comment le système permet d'avoir des phénomènes d'interférence.
- 14.2. La fente source est fine.
 - a. Déterminer la différence de marche entre les deux rayons interférant en un point $M(x)$ de l'écran.
 - b. Déterminer l'expression de l'intensité lumineuse I en un point M de l'écran
- 14.3. La fente source est maintenant supposée large, de largeur b . Déterminer la nouvelle expression de l'intensité lumineuse I en un point M de l'écran.
- 14.4. Tracer $I(M)$ et déduire pour quelle valeur de b obtient-on pour la première fois la disparition du système de frange.

EXERCICE 2 : MÉCANIQUE QUANTIQUE (EFS) - Un modèle simple de molécule et de solide unidimensionnels

1. Soit une particule de masse m placée dans un potentiel à une dimension :

$$V(x) = \alpha \delta(x) \quad (\alpha < 0, \text{ potentiel attractif})$$

où $\delta(x)$ est la distribution de Dirac :

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ \infty & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a) \end{cases}$$

- a. Quelle est la dimension de α ?

- b. Montrer par des considérations de symétrie que la fonction d'onde $\psi(x)$ de la particule est nécessairement paire.
- c. Écrire l'équation de Schrödinger de la particule $\forall x$. On s'intéresse aux états liés (bound states) de la particule (c'est-à-dire aux états d'énergie E négative).

On pose $E = -\frac{\hbar^2 K^2}{2m}$ et $\lambda_0 = -\frac{\hbar^2}{m\alpha}$

Écrire l'équation de Schrödinger précédente en fonction de K et λ_0 . Donner son expression pour $x \neq 0$ et la forme générale $\psi(x)$ de sa solution.

Sachant que $\psi(x) \in L^2$, espace des fonctions de carré sommable, et que $\psi(x)$ est continue en $x = 0$, en déduire l'expression générale des états liés.

- d. En intégrant l'équation de Schrödinger, écrite pour $\forall x$, sur un intervalle de largeur 2ε centré sur l'origine, déduire que le « saut » de la dérivée première de la fonction d'onde est : $\psi'(0^+) - \psi'(0^-) = -\frac{2}{\lambda_0} \psi(0)$

Combien y a-t-il d'états liés ? De quelle énergie ? Donner l'expression de la fonction d'onde.

- e. On s'intéresse maintenant aux états de diffusion (scattering states) de la particule ($E > 0$).

Calculer le coefficient de transmission T du puits de potentiel en fonction de l'énergie E . En donner ses limites pour les grandes et les faibles valeurs de l'énergie.

2. Soit un double potentiel δ :

$$V(x) = \alpha \left[\delta\left(x - \frac{d}{2}\right) + \delta\left(x + \frac{d}{2}\right) \right] \quad (\alpha < 0).$$

- a. Écrire la forme générale des fonctions d'onde pour les états liés. Quelle est la condition de quantification ?
- b. Discuter, à l'aide d'une résolution graphique, le nombre d'états liés en fonction de la distance d .
- c. Expliquer en quoi ce qui précède peut constituer un modèle simple de molécule unidimensionnelle (ion moléculaire H_2^+ par exemple).

3. On considère maintenant que la particule est soumise à un peigne de Dirac

$$V(x) = \alpha \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(x - na) \quad (\alpha < 0)$$

et on s'intéresse à ses états de diffusion.

- a. Écrire l'équation de Schrödinger de la particule valable $\forall x$ en fonction de K et λ_0 .
- b. Le potentiel $V(x)$ étant périodique, de période a , $V(x) = V(x + a)$, les états propres de la particule doivent avoir la même symétrie.
Vérifier qu'il en est ainsi en posant que $\psi(x) = u(x)e^{iKx}$, $\forall K$ et $u(x) = u(x + a)$. De telles fonctions sont appelées fonctions de Bloch.
- c. En utilisant l'équation de Schrödinger de la particule écrite pour $x \neq na$ et les conditions de passage vues précédemment (continuité de la fonction d'onde et saut fini de la

dérivée première en $x = na$), montrer que la condition de quantification s'écrit :

$$\left| \frac{a}{\lambda_0} \left(\frac{\sin(Ka)}{Ka} \right) + \cos(Ka) \right| \leq 1$$

Pour simplifier, on pourra prendre une solution de l'équation de Schrödinger sous la forme $\psi(x) = e^{iKx} + Ce^{-iKx}$.

- d. Que peut-on en conclure quant à la répartition des états de diffusion d'un électron dans un tel solide unidimensionnel ?

Le modèle simple de solide unidimensionnel décrit ici est connu sous le nom de « modèle de Krönig-Penney ».