

---

## Devoir de contrôle en mathématiques

---

### Exercice 1:

1. Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction  $\text{Arctg}$ . Préciser le rayon de convergence  $R$  de la série obtenue.

2. Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leurs sommes:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}, \quad \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+1}}.$$

3. Soit  $f$  la fonction définie par:  $f(x) = \begin{cases} \frac{\text{Arctg} x}{x}, & \text{si } x \neq 0; \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Montrer que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 2 :

1. Montrer que, pour tout  $x > 0$ , la fonction:  $t \mapsto \frac{\ln t}{x+t}$  est intégrable sur  $]0, 1]$ .

On pose alors  $f(x) = \int_0^1 \frac{\ln t}{x+t} dt$ , pour  $x > 0$ .

2. Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

3. Montrer que,  $\forall x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{\ln(x+1) - \ln x}{x}$ .

4. On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par:  $g(x) = f(x) + f(\frac{1}{x})$ . Montrer que  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , calculer  $g'(x)$  et en déduire que,  $\forall x > 0$ ,  $g(x) = -\frac{(\ln x)^2}{2} + 2f(1)$ .

5. (a) Calculer pour  $k \in \mathbb{N}$ , la valeur de l'intégrale  $I_k = \int_0^1 t^k \ln t dt$ .

(b) Vérifier que:  $\frac{1}{x+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^n}{x^{n+1}}, \quad \forall x > 1, \forall t \in ]0, 1[.$

(c) En déduire que,  $\forall x > 1$ ,  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 x^n}$ .

6. Montrer que  $f(x) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{x}$ .

7. En déduire un équivalent simple de  $f$  au voisinage de 0.