

Devoir de Synthèse N° 2 : **Analyse**
 Durée : 2H

Exercice : (10 points)

L'exercice contient deux parties I et II qui sont indépendantes.

Partie I

1. Soient $x > 0$ et $\beta > -1$. Montrer que la fonction $t \mapsto \varphi_\beta(t) = \frac{t^{x-1}}{\beta + e^t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. On désignera par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \varphi_0(t) dt.$$

2. Soient $|\beta| < 1$ et $x > 0$.

(a) Vérifier que

$$\left| \int_0^{+\infty} \varphi_\beta(t) dt - \int_0^{+\infty} \varphi_1(t) dt \right| \leq \frac{1-\beta}{1+\beta} \int_0^{+\infty} \varphi_1(t) dt.$$

(b) Dédire que

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \int_0^{+\infty} \varphi_\beta(t) dt = \int_0^{+\infty} \varphi_1(t) dt.$$

(c) Prouver que

$$\int_0^{+\infty} \varphi_\beta(t) dt = \Gamma(x) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\beta^n}{(n+1)^x}.$$

(d) Dédire que

$$\int_0^{+\infty} \varphi_1(t) dt = \Gamma(x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}.$$

Partie II

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit l'équation différentielle suivante :

$$(\mathcal{P}_\lambda) : xy'' + (\alpha - x)y' + \lambda y = 0.$$

Le but de cette partie est de trouver les solutions y_λ de $(\mathcal{P}_\lambda)$ développables en séries entières non nulles. On note $y_\lambda = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \frac{n - \lambda}{(n + 1)(\alpha + n)} a_n.$$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k - \lambda)}{n! \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha + k)} a_0.$$

3. Pour $\lambda = i \in \mathbb{N}$, montrer que les solutions sont des fonctions polynomiales de degré i .

Problème : (10 points)

Le problème contient trois parties I, II et III. Les parties II et III sont indépendantes, mais les deux utilisent les résultats de la partie I.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Partie I

Soit $k \in \mathbb{N}$.

1. En calculant la dérivée $k^{\text{ième}}$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ sur $] -1, 1[$, montrer que

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

2. En déduire que

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

Partie II

Un individu joue avec une pièce non nécessairement symétrique. On note $p \in]0, 1[$ la probabilité d'obtenir pile.

- Dans un premier temps, il lance la pièce jusqu'à obtenir pour la première fois pile. On note N le nombre de lancers nécessaires.
- Dans un deuxième temps, il lance N fois cette même pièce et on note X le nombre de piles obtenus au cours de cette seconde série de lancers.

On pose $q = 1 - p$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Préciser la loi de N et la loi de X sachant $(N = n)$.

2. (a) Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k / N = n) \mathbb{P}(N = n).$$

avec $\mathbb{P}(X = k / N = n) = \mathbb{P}_{(N=n)}(X = k)$ est la loi de X sachant $(N = n)$.

- (b) En déduire que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}}.$$

- (c) Déterminer $\mathbb{P}(X = 0)$.

3. Soit $\lambda \in]0, 1[$. On considère U et W deux variables aléatoires indépendantes telles que U suit la loi de Bernoulli de paramètre λ et W suit la loi géométrique de paramètre λ . On note $Z = UW$.

- (a) Vérifier que $Z(\Omega) = \mathbb{N}$.

- (b) i. Montrer que $\mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}(U = 0) = 1 - \lambda$.

- ii. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, Calculer $\mathbb{P}(Z = k)$.

4. En déduire que X a même loi qu'un produit de deux variables aléatoires indépendantes, l'une étant une variable de Bernoulli et l'autre une variable géométrique de même paramètre.
5. Déterminer alors l'espérance $\mathbb{E}(X)$ et la variance $\mathbb{V}(X)$.

Partie III

On pourra utiliser dans cette partie les résultats suivants :

Soient n un entier avec $n \geq 2$ et $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes. Alors, on a :

• si f est une application définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, alors $f(X_1), \dots, f(X_n)$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes.

• Si les n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont d'espérances finies, alors la variable aléatoire $\prod_{k=1}^n X_k$

est d'espérance finie et $\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n X_k\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k)$.

Soit $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$ et on considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ qui suit la loi géométrique de paramètre p .

1. Montrer que la fonction génératrice de la variable aléatoire X est donnée par

$$G_X(t) = \frac{pt}{1-qt}, \quad \forall t \in \left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[.$$

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendantes, de même loi géométrique de paramètre p . Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

2. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(S_n)$ et la variance $\mathbb{V}(S_n)$ de la variable aléatoire S_n .
3. On pose G_{S_n} la fonction génératrice de S_n .

(a) Montrer que

$$\forall t \in \left] -\frac{1}{q}, \frac{1}{q} \right[, \quad G_{S_n}(t) = \left(\frac{pt}{1-qt} \right)^n.$$

(b) En déduire que

$$\forall t \in \left] -\frac{1}{q}, \frac{1}{q} \right[, \quad G_{S_n}(t) = \left(\frac{p}{q} \right)^n \sum_{k=n}^{+\infty} C_{k-1}^{n-1} q^k t^k.$$

4. En déduire la loi de S_n .

5. (a) Montrer que,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - \frac{1}{p} \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{q}{np^2 \varepsilon^2}.$$

(b) En déduire que

$$1 - \frac{q}{n} \leq \mathbb{P} \left(S_n < \frac{2n}{p} \right).$$

- (c) Pour $p = \frac{1}{2}$, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{4n-1} \frac{C_{k-1}^{n-1}}{2^k} = 1$.

Bon Travail