

Institut préparatoire aux études de l'ingénieur de SFAX

Devoir de Contrôle de PHYSIQUE (PT 2)

Jeudi 01 Avril 2021 de 08h30 à 10h30

Les deux parties sont indépendantes.

Barème : Partie A (13 pts) - Partie B (07 pts)

PARTIE A

Les eaux fossiles des sources géothermiques sous-terrestres sont utilisées principalement pour l'irrigation, pour la hydrokinésithérapie et pour la production d'électricité.

Des forages dont la profondeur varie entre 800 et 2 700 mètres sont actuellement en exploitation dans le Sud-Tunisien. La plupart des forages sont artésiens et l'eau émerge sous une pression d'une vingtaine de bars; la température, à la sortie des forages, varie entre 50 et 73 °C. Les roches environnantes des nappes ont une température constante tout au long de l'année. Dans un premier temps nous étudierons les évolutions saisonnières de la température dans le sol. Puis nous tenterons d'expliquer cette température élevée par un modèle géophysique.

Preliminaires

Le sous-sol est considéré comme un milieu semi-infini, homogène, de conductivité thermique $\lambda = 2,8 \text{ SI}$ et de capacité calorifique volumique $c = 2,2 \cdot 10^6 \text{ JK}^{-1}\text{m}^{-3}$, situé dans le demi-espace $z > 0$.

On suppose que la température de la surface du sol (plan $z = 0$) est soumise à des variations sinusoïdales $T(z = 0, t) = T_0 + \theta_0 \cos(\omega t)$.

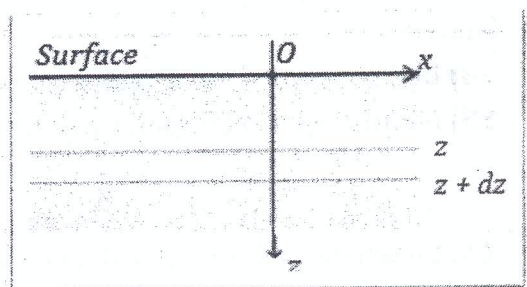
1) Donner la moyenne temporelle, la valeur maximale et minimale de la température en $z = 0$.

2) Le flux thermique ϕ_{th} est défini comme la quantité d'énergie dU traversant une surface S pendant dt . On introduit le vecteur $\vec{j}_{th}$, densité de flux thermique.

Rappeler la loi de Fourier en précisant les dimensions des différents termes.

On étudie une tranche «mésoscopique» de sol comprise entre z et $z + dz$ de surface S .

3) Pourquoi étudie-t-on une tranche «mésoscopique» ?



4) Etablir l'équation de la chaleur $\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2}$ (*). On précisera l'expression et la dimension du coefficient D de diffusion thermique.

5) Préciser les conditions aux limites du problème.

Evolutions saisonnières de la température dans le sol

On se propose de résoudre l'équation (*). On cherche des solutions de la forme :

$T(z, t) = T_0 + A \exp(i(\omega t - kz))$ où $A \in \mathbb{R}^*$ et $k \in \mathbb{C}^*$

6) Déterminer l'expression de $k(\omega)$ qu'on mettra sous la forme $k = k' + ik''$.

Quelle est la signification physique de k' et k'' . On donne $(1 - i)^2 = -2i$.

7) Déterminer l'expression correspondante de la solution réelle $T(z, t)$.

8) Tracer l'allure de $T(z, t = 0)$.

On considère des variations annuelles de température, variant entre 8°C et 38°C .

9) Calculer la vitesse de l'onde thermique ainsi définie.

10) À partir de quelle profondeur z_1 , les variations de température sont inférieures à 1°C ?

11) Commenter.

12) Que peut-on dire des variations quotidiennes de la température à la profondeur z_1 ? En terme de filtrage fréquentiel, comment se comporte le sol ?

Température d'origine géophysique

La température moyenne relevée dans les forages peut être expliquée par un modèle géothermique simple de la croûte terrestre d'épaisseur $L_c = 45 \text{ km}$. Celle-ci contient des éléments radioactifs qui produisent une énergie caractérisée par une puissance volumique $P_v(z) =$

$P_0 e^{-\frac{z}{H}}$ où $H = 10 \text{ km}$ et $P_0 = 4 \mu\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$. La croûte terrestre repose sur le manteau terrestre, à la fois plus dense et plus chaud que la croûte. On admet enfin qu'au niveau de l'interface entre la croûte et le manteau ce dernier génère un flux surfacique constant $\vec{j}_m = -j_m \vec{e}_z$ où $j_m = 0,04 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. On se place en régime stationnaire.

13) Déterminer la puissance radioactive ϕ^{rad} dégagée dans un cylindre de section S et de hauteur L_c .

14) Dédire le flux thermique $\phi_{th}(z = 0)$ traversant une surface S .

15) Montrer que la température $T(z)$ obéit à l'équation :

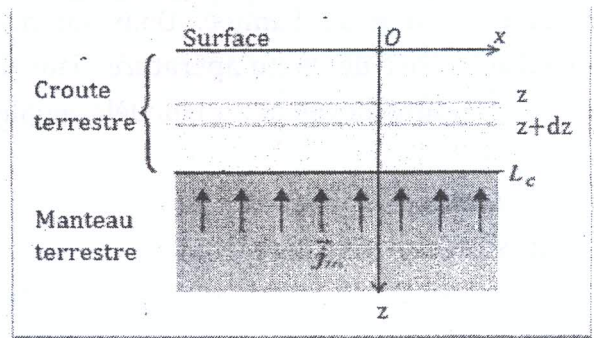
$$\frac{d^2 T}{dz^2} = -\frac{P_v(z)}{\lambda}$$

16) En tenant compte des valeurs numériques, montrer que $T(z)$ peut se mettre sous la forme simplifiée :

$$T(z) = \frac{P_0 H^2}{\lambda} \left(1 - e^{-\frac{z}{H}}\right) + \frac{j_m}{\lambda} z + T_0$$

17) Calculer $T(z = 1500 \text{ m})$ au niveau d'un forage puis $j_{th}(z = 0)$. On prendra $T_0 = 23^\circ\text{C}$.

18) Commenter.

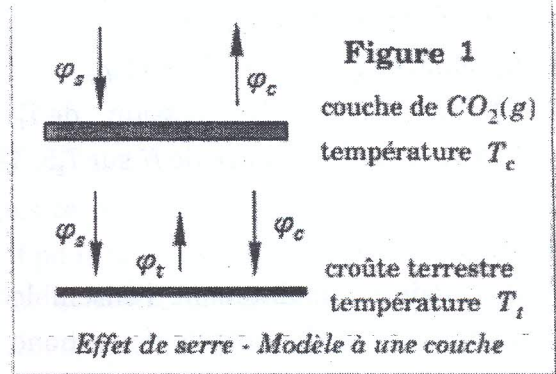


PARTIE B

On cherche dans cette partie à décrire le phénomène d'effet de serre et son amplification du fait de l'augmentation de la quantité de dioxyde de carbone dans l'atmosphère.

Modèle à une couche

La description du modèle est schématisée figure 1. La croûte terrestre est assimilée à un corps noir de température T_t , émettant un rayonnement thermique de flux surfacique φ_t . La Terre est supposée entourée d'une couche contenant du dioxyde de carbone gazeux en concentration fixée n_0 (m^{-3}). La température de la couche est notée T_c et le rayonnement qu'elle émet est associé au flux surfacique φ_c des deux côtés de la couche.



On désigne par $\varphi_s = 342 \text{ Wm}^{-2}$ le flux solaire surfacique reçu. Les rayons du soleil arrivent sous incidence normale sur la couche gazeuse.

On admettra par la suite que :

- La surface de soleil, de température $T_s \approx 5800\text{K}$, émet comme un corps noir un rayonnement principalement situé autour de la longueur d'onde λ_s .
- La surface de la terre, de température $T_t \approx 290\text{K}$, émet comme un corps noir un rayonnement principalement situé autour de la longueur d'onde λ_t .
- La couche de $\text{CO}_2(g)$, de température $T_c \approx 250\text{K}$, peut être assimilée à un corps noir, dont le maximum d'émission est autour de la longueur d'onde λ_c .
- La couche de $\text{CO}_2(g)$ absorbe la totalité de flux terrestre.
- La couche de $\text{CO}_2(g)$ est transparente au rayonnement solaire.

1) Rappeler la forme de la loi de déplacement de Wien. En déduire le domaine spectral de l'émission maximale du soleil, de la croûte terrestre et de la couche de $\text{CO}_2(g)$.

2) Rappeler la loi de Stefan. On donne la constante de Stefan $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$

3) Montrer qu'à l'équilibre radiatif de l'ensemble {couche + croûte terrestre}, $\varphi_t = 2 \varphi_s$.

4) Exprimer la température T_t en fonction de φ_s et de la constante de Stefan σ .

Comparer le résultat à celui que l'on obtiendrait si la couche n'existait pas.

Modèle à couches multiples

On suppose que la quantité de $\text{CO}_2(g)$ augmente. On modélise cette augmentation en considérant la superposition de N couches contenant du $\text{CO}_2(g)$, toutes identiques à la précédente (figure 2). Ainsi, chaque couche admet la même concentration n_0 en $\text{CO}_2(g)$.

On note φ_{cp} le flux surfacique émis vers le haut et vers le bas par la $p^{\text{ième}}$ couche de température T_{cp} . Le rayonnement émis par une couche est totalement absorbé par les autres couches.

5) Traduire l'équilibre radiatif en terme de flux surfaciques :

- de l'ensemble {toutes les couches + croûte terrestre} ;
- de la $p^{\text{ième}}$ couche ;
- de la première couche ;
- de la croûte terrestre.

6) Montrer que $\varphi_t = (N + 1) \varphi_s$.

7) En déduire l'expression de T_t .
Conclure sur l'influence de N sur T_t .

Modèle continu

On modélise maintenant l'ensemble des N couches de dioxyde de carbone de manière continue. La Terre est donc entourée d'une couche gazeuse sphérique de rayon moyen R_t proche de celui de la Terre et d'épaisseur $h \ll R_t$ (figure 3). La concentration n_0 ne varie pas ; seule h est susceptible de varier si la quantité de CO_2 varie. On suppose qu'initialement $h = 5\text{km}$ et que $T_t = 288\text{K}$.

Soit N_0 le nombre total de molécules de $CO_2(g)$ présentes dans la couche gazeuse. Selon le modèle à couches multiples, N_0 est proportionnel au nombre de couches N : $N_0 = \gamma N$.

8) Montrer alors que $N = \alpha h$, où α est une constante positive fonction de n_0 , γ et R_t .

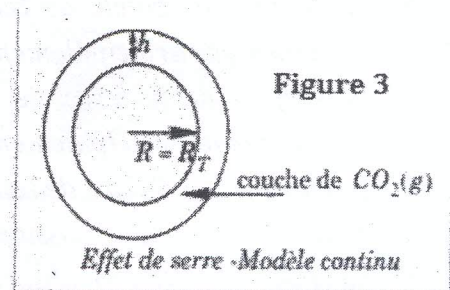
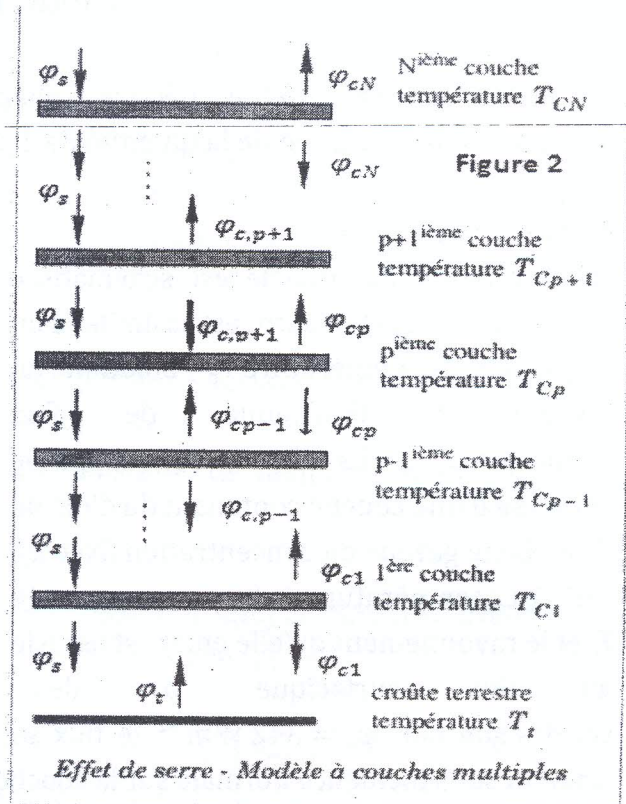
9) En déduire alors que :

$$T_t = \left(\frac{(1 + \alpha h)}{\sigma} \varphi_s \right)^{\frac{1}{4}}$$

10) Préciser la valeur numérique et l'unité de α .

11) On suppose une augmentation de 10% du volume de CO_2 présent dans la troposphère. Déterminer numériquement l'augmentation de l'épaisseur Δh de la couche de dioxyde de carbone. En déduire numériquement l'augmentation de la température ΔT_t .

12) Quel(s) phénomène(s) physique(s) a-t-on négligé dans les modèles précédents ?



**** Fin de l'épreuve ****