

Institut préparatoire aux études de l'ingénieur de SFAX

Examen de PHYSIQUE (PT 2)

Jeudi 03 Juin 2021 de 08h30 à 12h30

Les trois parties du problème sont indépendantes.

Barème : Partie A : 06 points Partie B : 05 points

Partie C : 09 points

Données :

Constante de Planck : $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$

Constante de Planck réduite : $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$

Masse molaire du carbone : $M_C = 12 \text{ g mol}^{-1}$

Constante d'Avogadro : $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Constante de Boltzmann $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$

$1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Partie A : Dualité onde-corpuscule

Les phénomènes quantiques qui apparaissent à l'échelle microscopique sont parfois difficiles à appréhender car ils ne correspondent pas à notre intuition naturelle fondée sur notre expérience du monde macroscopique. À la base de leur compréhension se trouve l'idée de dualité onde-particule et la notion d'onde de matière.

L'objet de cette partie est d'étudier des expériences qui ont mis en évidence ces deux notions.

- 1- Comment mettre en évidence le caractère ondulatoire de la lumière ?
- 2- Citer une expérience mettant en évidence la notion de photon.
- 3- Rappeler la relation de Planck-Einstein.

Interférences lumineuses

On se place dans un milieu d'indice $n_0 = 1$. Soit un faisceau de rayons lumineux arrivant depuis une source S monochromatique de longueur d'onde λ , avec une incidence θ_0 , sur un réseau plan de pas a et émergeant avec un angle θ vers un point M de l'écran repéré par son abscisse x (Figure 1-1). On suppose que l'écran est placé à une distance $D \gg x$.

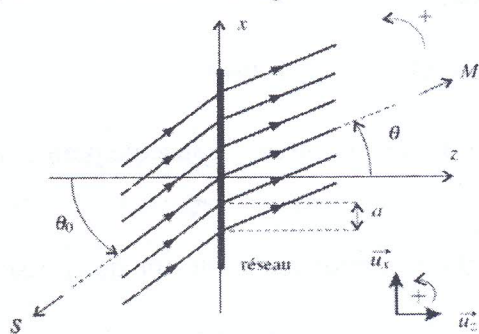


Figure 1-1 : Diffraction par un réseau.

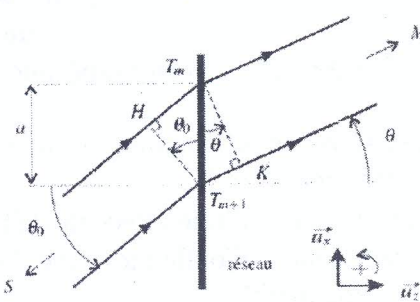


Figure 1-2 : Calcul de la différence de marche.

4- Déterminer la différence de marche $\delta = (ST_{m+1}M) - (ST_mM)$, ainsi que le déphasage φ , entre deux ondes passant par deux fentes consécutives T_{m+1} et T_m . (Figure 1-2)

5- En déduire la formule fondamentale des réseaux.

6- Soit $\underline{A}_m = A_0 e^{-i\varphi_m}$ l'amplitude complexe au point M de l'onde issue de la fente T_m . On prendra comme origine des phases celle passant par la fente T_1 . Exprimer l'amplitude complexe $\underline{A}_{tot}(M)$ résultante de la superposition au point M des N ondes diffractées par le réseau.

7- En déduire que l'intensité résultante $I(M) = |\underline{A}_{tot}(M)|^2 = I_0 \left(\frac{\sin(\frac{N\varphi}{2})}{\sin(\frac{\varphi}{2})} \right)^2$ où $I_0 = A_0^2$

La courbe de l'intensité en fonction de φ pour un réseau de N fentes est la suivante :

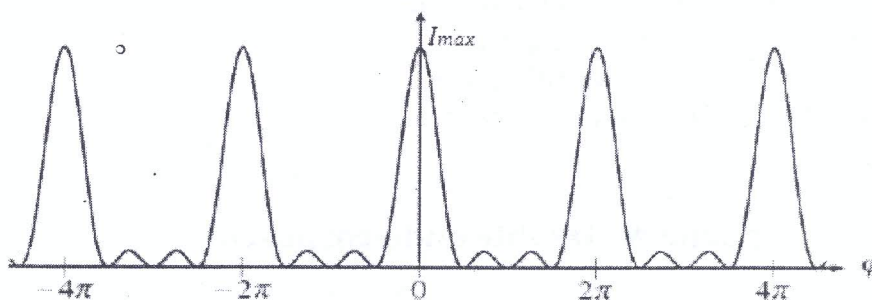


Figure 2 : Représentation de l'intensité relative pour $N = 4$

8- Comment évolue cette figure lorsque le nombre de fentes N augmente ? Justifier.

9- Montrer qu'en incidence normale, la distance entre deux pics principaux est $i = \frac{\lambda D}{a}$.

Interférences de molécules de fullerène

En 1999, des chercheurs de l'Université de Vienne montrent que la dualité onde-particule s'applique également à des macromolécules telles que le fullerène C_{60} . La description est donnée dans la figure 3. Le réseau utilisé est un réseau de fentes fines de pas $a = 100 \text{ nm}$.

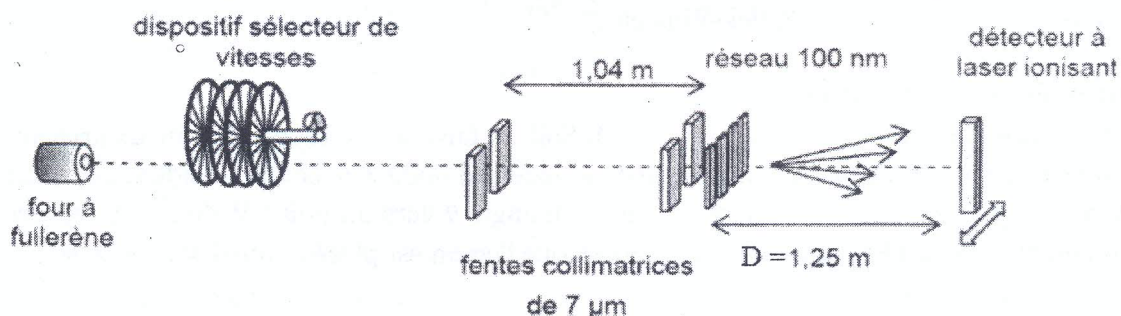


Figure 3 : Dispositif expérimental de la diffraction du fullerène.

10- Expliquer simplement comment se manifesterait la dualité onde-corpuscule pour les molécules de fullerène ?

11- Déterminer la masse d'une molécule de fullerène.

12- Calculer la longueur d'onde moyenne de de Broglie λ_{Bm} pour une molécule de vitesse moyenne $v_m = 200 \text{ m.s}^{-1}$.

13- La figure d'interférence (Figure 4) obtenue sur un temps d'acquisition de 50s est

donnée ci-dessous. Déterminer la valeur expérimentale de l'interfrange . En déduire la longueur d'onde expérimentale λ_{exp} . La comparer avec λ_{Bm} . Commenter.

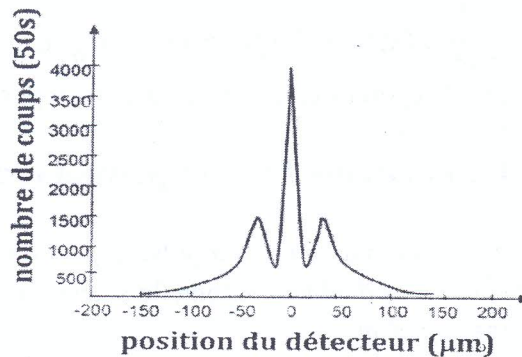


Figure 4 : Figure d'interférence obtenue sur un temps d'acquisition de 50s.

En réalité, les vitesses des molécules à la sortie du four présentent une dispersion Δv autour de v_m (**figure 5-1**). Ceci nous incite à modéliser la source de molécules C_{60} comme une source d'ondes de de Broglie à spectre étendue (**figure 5-2**).

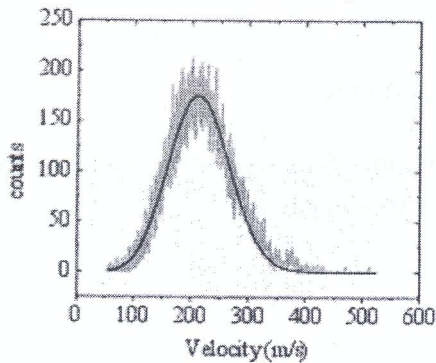


Figure 5-1 : Distribution des vitesses des molécules de fullerène à la sortie du four.

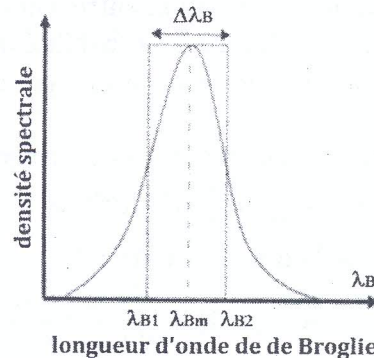


Figure 5-2 : Modélisation du spectre de la source de molécules C_{60} .

14- Montrer que $\Delta\lambda_B \approx \lambda_{Bm} \frac{\Delta v}{v_m}$.

15 Exprimer ℓ_c la longueur de cohérence de la source en fonction de λ_{Bm} et $\Delta\lambda_B$. Rappeler la condition du recouvrement des trains d'ondes.

16- Quelle est la conséquence d'un élargissement spectral de la source sur la figure d'interférences ?

17- En déduire l'intérêt du sélecteur mécanique de vitesse.

18- Expliquer l'affirmation suivante "La température du faisceau incident joue un rôle important dans la diffraction. Si elle est trop élevée, les molécules de fullerène perdent leur cohérence : les interférences sont alors détruites".

19- Compte-tenu de l'expérience décrite plus haut, la particule située au point M est décrite à l'instant t par une fonction d'onde $\psi(M, t)$ contenant toute les informations sur la particule. Quelle est l'interprétation de $|\psi(M, t)|^2$?

20- Pour tenir compte de l'aspect "matériel" de la particule, on impose à la fonction d'onde $\psi(M, t)$ la condition : $\iiint_{esp} |\psi(M, t)|^2 d\tau = 1$ où $d\tau(M)$ est l'élément de volume autour du point M . Que représente cette condition ?

Dans toute la suite du problème, on cherche des états stationnaires, d'énergie E , de la forme $\psi(x, t) = \phi(x)f(t)$ solutions de l'équation de Schrödinger à une dimension :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) + V(x)\psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t)$$

Où $V(x)$ est l'énergie potentielle (potentiel) d'interaction de la particule avec le milieu.

Partie B : Particule libre et paquet d'ondes

On considère une particule libre de masse m , d'impulsion $\vec{p}$ et d'énergie E placée dans un potentiel $V(x)$ nul, susceptible de se déplacer le long de l'axe $(x'x)$.

- 1- Donner une relation entre E , p et m
- 2- Montrer que $\phi(x)$ vérifie l'équation $\phi''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2} \phi(x) = 0$
- 3- Montrer que $f(t) = e^{-i\omega t}$ où ω est une fonction de l'énergie E .
- 4- Dédire que $\psi(x, t)$ est la somme de deux ondes planes se propageant en sens inverse.

On s'intéresse par la suite à la fonction d'onde $\psi(x, t) = \alpha \exp(i(kx - \omega t))$.

- 5- Déterminer une relation entre $\vec{p}$ et k .
- 6- Que peut-on dire de la probabilité de présence ?
- 7- Pourquoi cette onde ne permet pas de décrire la particule ?

Pour résoudre la difficulté, on envisage un paquet d'ondes (superposition d'ondes planes) dont $\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{ikx} dk$; $g(k) = \sqrt{b} e^{-b|k-k_0|}$ et $b > 0$.

- 8- Quelle est la dimension de b ?

- 9- Montrer que $\psi(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} b^{3/2} \frac{e^{ik_0 x}}{x^2 + b^2}$

10- On définit l'incertitude de mesure d'une grandeur $G(x, t)$ par $\Delta G = \sqrt{\langle G^2 \rangle - (\langle G \rangle)^2}$ avec $\langle G \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, t) |\psi(x, t)|^2 dx$. Calculer $\Delta x(0)$. **On donne** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2}{(y^2 + a^2)^2} dy = \frac{\pi}{2a}$

- 11- Retrouver l'inégalité de Heisenberg spatiale sachant que $\Delta k = \frac{1}{b\sqrt{2}}$.

On s'intéresse maintenant à l'évolution du paquet d'ondes au cours du temps.

L'expression intégrale est donnée par $\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk$

- 12- Déterminer la relation de dispersion $\omega(k)$. Commenter.
- 13- Calculer la vitesse de phase v_ϕ .
- 14- Calculer la vitesse du groupe $v_g = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0}$.
- 15- Montrer que, pour un paquet d'ondes faiblement dispersé autour de k_0 , la fonction d'onde $\psi(x, t) \approx e^{i(k_0 v_g - \omega_0)t} \psi(x - v_g t, 0)$. Commenter.

L'écart quadratique à l'instant t est donnée par $\Delta x(t) = \sqrt{b^2 + \frac{\hbar^2}{2b^2 m^2} t^2}$

- 16- Représenter, sur un même schéma, la densité de probabilité $\rho(x, t)$ à $t = 0$ et $t > 0$.

- 17- Montrer que $\Delta x(t) = \Delta x(0) \sqrt{1 + \frac{t^2}{t_0^2}}$ où t_0 est fonction de m , b et $\hbar$.

18- Etudier les cas limites $t \ll t_0$ et $t \gg t_0$.

19- Calculer t_0 pour un électron de masse $m \sim 10^{-30} \text{ kg}$ confiné à l'échelle de 1 nm .

Partie C : Particule dans un puits infini

Etats et énergies propres.

Soit une particule de masse m piégée dans le potentiel $V(x)$ représenté sur la figure 6.

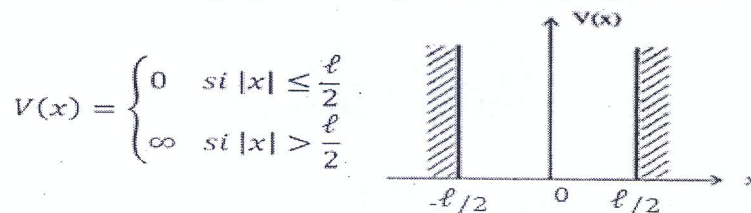


Figure 6 : Modélisation d'un puits de potentiel infini

On cherche des états stationnaires d'énergie E de la forme $\psi(x, t) = \phi(x) e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$ pour une particule confinée dans le puits.

1- Donner les conditions aux limites vérifiées par $\psi(x, t)$.

2- Montrer que $\phi(x) = \begin{cases} C \cos\left(n\frac{\pi}{\ell}x\right) & \text{si } n \text{ est impair} \\ C' \sin\left(n\frac{\pi}{\ell}x\right) & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}^*$

3- Montrer que $C' = C = \sqrt{\frac{2}{\ell}}$

4- En déduire que l'énergie est donnée par $E_n = n^2 E_1$ où E_1 est une fonction de m , ℓ et $\hbar$.

5- Exprimer les fonctions d'onde $\psi_n(x, t)$. Commenter.

6- Représenter la densité de probabilité $\rho(x)$ pour les deux premiers niveaux.

7- Déduire la valeur moyenne $\langle x \rangle$ dans tout état propre.

8- Justifier que l'énergie de la particule ne peut pas être nulle.

9- Comparer à la situation classique d'une particule dans une cavité de potentiel.

10- On piège une particule de masse $m = 10^{-30} \text{ kg}$ dans un puits d'extension $\ell = 1,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$. Calculer l'énergie de l'état fondamental et faire un commentaire sur l'ordre de grandeur obtenu.

On suppose qu'à un instant (pris comme origine), la dimension du puits passe de ℓ à $\gamma\ell$ ($\gamma > 1$). Les nouveaux états propres normalisés sont notés $\phi_{n,\gamma}(x)$.

11- Écrire les expressions des $\phi_{n,\gamma}(x)$.

12- Quelles sont les énergies $E_{n,\gamma}$?

13- Commenter le cas où γ^2 est irrationnel.

Evolution dans un état non stationnaire.

A l'instant $t = 0$, le système se trouve dans une combinaison linéaire de l'état fondamental et du premier état excité $\psi_{1,2}(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(x, 0) + \psi_2(x, 0))$

14- Quel est le rôle du facteur $\frac{1}{\sqrt{2}}$?

15- Donner l'expression de $\psi_{1,2}(x, t)$.

16- Montrer que la densité de probabilité $\rho_{1,2}(x, t)$ oscille dans le temps périodiquement à une pulsation $\omega_{1,2}$ que l'on déterminera en fonction de E_1, E_2 et $\hbar$.

17- Montrer que $\langle x \rangle(t) = \frac{16}{9\pi^2} \ell \cos(\omega_{1,2}t)$. On donne $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} y \cos(y) \sin(2y) dy = \frac{8}{9}$

Soit $x_{cl}(t)$ la position à l'instant t d'une particule classique, de même masse, partie à $t = 0$ de x_0 , avec une vitesse v_0 .

18- Quelle est la période τ_{cl} du mouvement ?

19- Comparer τ_{cl} à $\tau = \frac{2\pi}{\omega_{1,2}}$ sachant que $v_0 = \frac{8\hbar}{3m\ell}$.

20- Sur un même schéma représenter $\langle x \rangle(t)$ et $x_{cl}(t)$.

21- Commenter.

Système en équilibre avec un thermostat

Le système à une dimension, étudié précédemment, est en équilibre thermique avec un thermostat à la température T . On admet que ce système se trouve dans une combinaison statistique des états quantiques d'énergies $E_n = n^2 E_1$ où $E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m\ell^2}$. On pose $\beta = \frac{1}{k_B T}$.

22- Définir le facteur de Boltzmann.

23- Exprimer $r_n = \frac{p_{n+1}}{p_n}$ où p_n est la probabilité d'occupation de l'état d'énergie E_n .

24- Calculer r_1 pour $E_1 \sim 10 \text{ eV}$ (cas d'un électron confiné dans un atome) à $T = 289 \text{ K}$.

25- Commenter.

Dans la suite on prend $E_1 \sim 2,5 \cdot 10^{-12} \text{ eV}$ (ℓ macroscopique)

26- Calculer les nombres n_1 et n_2 tels que $E_{n_1} = k_B T$ et $E_{n_2} = 1,02 k_B T$ avec $T = 289 \text{ K}$.

27- En déduire qu'il est possible de considérer que l'énergie varie continûment quand on étudie le système à température ambiante.

Dans la suite on se placera dans cette condition à toutes températures.

28- Exprimer $n(E)$ le nombre quantique en fonction de l'énergie E de la particule.

29- Le nombre de niveaux d'énergie compris entre E et $E + dE$ est donné par $dn = n(E + dE) - n(E) = w(E)dE$ où $w(E)$ est la densité des niveaux d'énergie.

Montrer que $w(E) = \sqrt{\frac{m\ell^2}{2\pi^2 \hbar^2 E}}$

30- Soit $dp(E) = A \exp(-\beta E)w(E)dE$ la probabilité pour qu'une particule ait une énergie comprise entre E et $E + dE$. Déterminer A .

31- En déduire la valeur moyenne de l'énergie $\langle E \rangle$ et sa variance $Var(E)$ en fonction de T .

32- En déduire la variation relative $\frac{\Delta E}{\langle E \rangle}$. Commenter.

On donne : $\int_0^\infty y \sqrt{y} e^{-y} dy = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$, $\int_0^\infty \sqrt{y} e^{-y} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\int_0^\infty \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} dy = \sqrt{\pi}$

FIN de l'épreuve