

Examen d'Algèbre - Semestre N°1
Sections : P.T.2 et P.C.2

Durée : 2h

Date : 13 Décembre 2021

Nombre de pages : 2

Exercice/ (6 pts)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, On considère $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $2n$ muni de sa base canonique $B = (1, X, X^2, \dots, X^{2n})$.

Soit ϕ l'application définie sur E par :

$$\forall P \in E, \quad \phi(P) = \left(\frac{1}{4} - X^2\right)P' + 2nXP.$$

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de E .
2. Soit $k \in \llbracket -n, n \rrbracket = \{-n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n\}$.
 - (a) Soit $P_k = (X + \frac{1}{2})^{n+k}(X - \frac{1}{2})^{n-k}$. Vérifier que $\phi(P_k) = kP_k$.
 - (b) Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme ϕ .
 - (c) En déduire que ϕ est diagonalisable.
3. Soit $A = \text{mat}(\phi, B)$ et $M = A + nI_{2n+1}$.
Montrer que M est diagonalisable puis déduire $\text{sp}(M)$.

Problème/ (14 pts)

On note $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit sur E l'application φ qui à tout $f \in E$, $\varphi(f)$ est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(f)(x) = \int_{x-1}^x f(t)dt.$$

Partie 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, On considère $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n muni de sa base canonique $B = (1, X, X^2, \dots, X^n)$. Dans cette partie, on identifie tout polynôme avec sa fonction polynomiale.

1. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket = \{0, \dots, n\}$. On pose $P_k = X^k$.

(a) Montrer que $\varphi(P_k)(x) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k C_{k+1}^i (-1)^{k-i} x^i$.

(b) Montrer que E_n est stable par φ . En déduire que φ induit un endomorphisme sur E_n qu'on note φ_n .

2. (a) Déterminer $M = \text{mat}(\varphi_n, B)$, la matrice de φ_n dans la base B .

(b) Montrer que φ_n est bijectif.

(c) φ_n est-il diagonalisable? Justifier votre réponse.

Partie 2 :

Dans cette partie, l'application φ est définie sur $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. (a) Montrer que $\ker(\varphi) = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f \text{ périodique de période 1 et } \int_0^1 f(t) dt = 0\}$.

(b) Soit l'application $f : t \mapsto \sin(2\pi t)$. Vérifier que $f \in \ker(\varphi)$, puis déduire que 0 est une valeur propre de φ .

2. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On définit sur $\mathbb{R}$ l'application $f_a : t \mapsto e^{at}$.

(a) Montrer que $\varphi(f_a) = \frac{1 - e^{-a}}{a} f_a$

(b) En déduire que $\left\{0, 1\right\} \cup \left\{\frac{1 - e^{-a}}{a}, a \in \mathbb{R}^*\right\} \subset \text{sp}(\varphi)$.

3. Dans cette question, on se propose de montrer que tout réel positif est une valeur propre de φ . On définit l'application

$$\begin{aligned} g :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[&\longrightarrow]0, 1[\cup]1, +\infty[\\ x &\longmapsto g(x) = \frac{e^x - 1}{x}. \end{aligned}$$

On veut montrer que g est bijective.

(a) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$.

(b) (i) Etudier sur $\mathbb{R}$ la fonction $h : x \mapsto xe^x - e^x + 1$.

(ii) Vérifier que $h(]-\infty, 0[) =]0, 1[$ et que $h(]0, +\infty[) =]1, +\infty[$.

(iii) En déduire que les fonctions

$$\begin{aligned} g_1 :]-\infty, 0[&\longrightarrow]0, 1[& \text{et} & g_2 :]0, +\infty[&\longrightarrow]1, +\infty[\\ x &\longmapsto g_1(x) = \frac{e^x - 1}{x} & & x &\longmapsto g_2(x) = \frac{e^x - 1}{x} \end{aligned}$$

sont bijectives.

(iv) En déduire que $\forall \lambda \in]0, 1[\cup]1, +\infty[, \exists! a \in \mathbb{R}^*, \text{ telle que } \lambda = g(-a)$.

(c) Conclure que $\mathbb{R}_+ \subset \text{sp}(\varphi)$.