

Institut préparatoire aux études de l'ingénieur de SFAX

Devoir de PHYSIQUE (PT 2)

Mercredi 20 Octobre 2021 de 08h30 à 10h30

Les deux parties A et B sont indépendantes.

Barème :

Partie A (8 pts)

Partie B (12 pts)

Données :

* Permittivité diélectrique du vide $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$;

* Perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$;

* Masse d'un électron $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$; * Charge élémentaire $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$;

On repère un point M de l'espace par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) .

Dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, pour un champ vectoriel $\vec{A} = A_r \vec{u}_r + A_\theta \vec{u}_\theta + A_z \vec{u}_z$, on a :

$$* \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

$$* \text{Si } \vec{A} = A_z(r) \vec{u}_z \text{ alors } \vec{\Delta}(\vec{A}) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} \right) \vec{u}_z$$

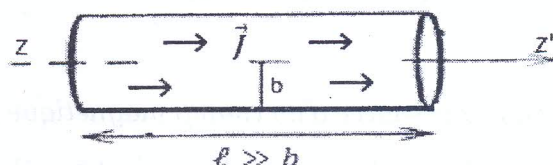
$$* \overrightarrow{\text{rot}} \left(\overrightarrow{\text{rot}} (\vec{A}) \right) = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\text{div}(\vec{A}) \right) - \vec{\Delta}(\vec{A})$$

Un conducteur électrique est un milieu dans lequel des charges électriques sont libres de se déplacer. On se propose d'étudier quelques caractéristiques de ce milieu. Pour cela, on considère un conducteur ohmique en cuivre, de conductivité $\gamma = 5,8 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$, cylindrique d'axe (Oz), de rayon $b = 1 \text{ cm}$ et de longueur $\ell \gg b$.

Partie A : Bilan d'énergie dans un conducteur en régime stationnaire.

Un conducteur est modélisé par un réseau cristallin d'ions positifs fixes dans lequel des électrons de conduction, de masse m , se déplacent librement. La densité volumique d'électrons de conduction dans le métal est $n_v \approx 10^{30} \text{ m}^{-3}$.

Sous l'effet d'un champ électrique statique et uniforme $\vec{E} = E_0 \vec{u}_z$, les électrons se mettent en mouvement d'ensemble avec la vitesse $\vec{v}$ et un courant électrique stationnaire d'intensité I et de densité volumique $\vec{j} = j_0 \vec{u}_z$ s'établit dans le conducteur.



L'agitation thermique des électrons et leurs collisions incessantes sur les ions du réseau et entre eux sont un frein à l'établissement d'un mouvement d'ensemble des électrons.

Nous modélisons cela en introduisant une force de frottement visqueux $\vec{f} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$ où τ est une constante de temps et $\vec{v}$ la vitesse d'ensemble des électrons.

On donne $\vec{v}(t = 0) = \vec{0}$.

1- Ecrire la RFD pour un électron. En déduire l'expression $\vec{v}_{lim} = \vec{v}(t \gg \tau)$ de la vitesse des électrons en régime stationnaire.

2- Exprimer la densité de charge mobile ρ_{mob} en fonction de e et n_v . En déduire la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ où γ est la conductivité électrique que l'on exprimera en fonction de m, e, τ et n_v .

3- Calculer τ . Commenter.

4- Exprimer le champ électrique $\vec{E}(M)$ à l'intérieur du conducteur en fonction de I, γ et b .

5- Etablir que la puissance volumique cédée aux porteurs de charge $P_{v,ced} = \gamma E^2$ et calculer la puissance P_{ced} cédée aux porteurs de charge du conducteur. En déduire la résistance R du conducteur.

6- Justifier que le champ magnétique $\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_\theta$ à l'intérieur du conducteur et déterminer l'expression de $\vec{B}(r \leq b)$.

7- Calculer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(r = b)$. Déduire la puissance électromagnétique rayonnée P_{ray} .

8- Vérifier le bilan global d'énergie électromagnétique dans le conducteur.

Partie B : Conducteur dans un champ magnétique variable

Maintenant, le conducteur considéré est plongé dans une région où règne un champ magnétique variable et uniforme $\vec{B}_0(t) = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$ avec $\omega = 314 \text{ rad/s}$.

Le champ $\vec{B}_0(t)$ étant variable dans le temps donc source d'un champ électrique $\vec{E}_1(M, t)$ à l'intérieur du conducteur.

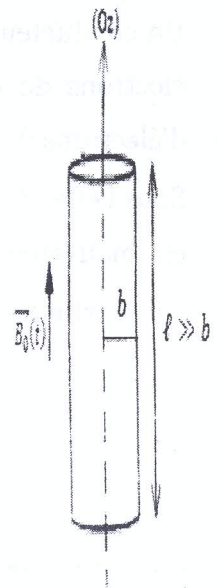
9- Justifier, par raison de symétrie que $\vec{E}_1(M, t) = E_1(r, t) \vec{u}_\theta$

10- En utilisant la forme intégrale de l'équation de M-F, montrer que :

$$\vec{E}_1(r, t) = \frac{\omega r}{2} B_0 \sin(\omega t) \vec{u}_\theta$$

11- Calculer $\langle P_{1j} \rangle$ la puissance moyenne dissipée dans le cylindre et justifier alors le choix des fréquences de l'ordre de 10 kHz dans les fours à induction.

Le champ $\vec{E}_1(r, t)$ est à son tour source d'un champ magnétique $\vec{B}_1(r, t)$ qui se superpose au champ $\vec{B}_0(t)$ à l'intérieur du conducteur. Ce champ $\vec{B}_1(r, t)$ est à son rôle source d'un champ $\vec{E}_2(r, t)$ parallèle à $\vec{E}_1(r, t)$, etc...



12- Ecrire l'équation de Maxwell liant $\vec{E}_1(r, t)$ et $\vec{B}_1(r, t)$ et montrer qu'on peut négliger le courant de déplacement dans cette équation.

13- Calculer alors $\vec{B}_1(r, t)$ sachant que $\vec{B}_1(b, t) = \vec{0}$. On introduira une longueur caractéristique $\delta = \sqrt{\frac{2}{\gamma\omega\mu_0}}$.

14- Montrer que $\vec{E}_2(r, t) = \frac{\gamma\mu_0\omega^2}{16} r(r^2 - 2b^2)B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_\theta$

15- Le champ $(\vec{E}, \vec{B})$ peut-il être confondu à $(\vec{E}_1(r, t), \vec{B}_0(r, t))$? Justifier.

16- Montrer alors qu'il est nécessaire de conserver le(s) terme(s) en ω^4 dans l'expression de la puissance moyenne $\langle P_j \rangle$ dissipée par effet joule dans le conducteur.

On suppose, dans la suite, que le champ magnétique à l'intérieur du conducteur s'écrit, en notation complexe, sous la forme $\underline{\vec{B}}(r, t) = B(r) \exp(i\omega t) \vec{u}_z$. La fréquence de travail est, maintenant, prise telle que $\delta \ll b$.

17- Etablir l'équation aux dérivées partielles (dite de propagation) vérifiée par $\underline{\vec{B}}(r, t)$.

18- En déduire l'équation vérifiée par $B(r)$

On admet que dans le conducteur étudié et à la fréquence de travail, le module du champ magnétique s'écrit en bonne approximation $|\underline{\vec{B}}(r, t)| = B_m \exp(\frac{r-b}{\delta})$

19 - Déterminer une expression approchée de $|\vec{J}(r, t)|$.

20- Tracer $|\vec{J}(r, t)|$ en fonction de r . Commenter les résultats obtenus.

***** *Fin de l'épreuve* *****