

Examen de PHYSIQUE (PT 2)

Mardi 14 Décembre 2021 de 08h30 à 12h30

Problème I : Radar de la police (11 pts)

Données : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$; $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$

* Les composantes tangentielles du champ électrique $\vec{E}$ sont continues.

* $\text{rot}(\text{rot}\vec{A}) = \text{grad}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$ * $\cos(p+q) + \cos(p-q) = 2 \cos(p) \cos(q)$.

Partie A – Réflexion sur un conducteur

Propagation d'une OPPH dans le vide.

On considère, dans le vide, une onde électromagnétique plane progressive notée (O_i) dont le champ électrique s'écrit en notation complexe $\vec{E}_i = E_{0i} e^{i(\omega t - k_0 x)} \vec{u}_y$.

1- Rappeler les équations de Maxwell dans le vide dépourvu de charge et de courant.

2- Etablir l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique.

En déduire la relation de dispersion dans le vide.

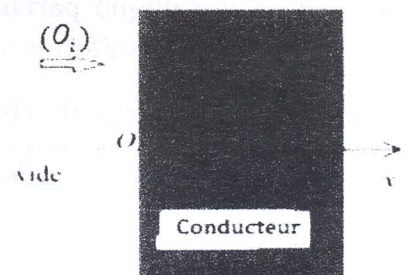
3- Préciser l'état de polarisation de cette onde, sa direction et son sens de propagation.

4- Déterminer le champ magnétique $\vec{B}_i$.

5- En déduire la valeur moyenne de vecteur de Poynting $\langle \vec{\Pi}_i \rangle$.

Propagation d'une OPPH dans un conducteur - Effet de peau.

Cette onde rencontre maintenant en $x = 0$ et sous incidence normale un milieu conducteur, de conductivité $\gamma = 2,8 \cdot 10^7 \text{ Sm}^{-1}$ supposée constante, occupant le demi-espace $x > 0$. Ce milieu, rapporté à un repère orthonormé direct $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ possède les mêmes propriétés électrique et magnétique que le vide ($\varepsilon = \varepsilon_0, \mu = \mu_0$).



On se propose maintenant d'étudier la propagation de l'onde transmise (O_t) dans le conducteur. Le champ électrique de cette onde s'écrit en notation complexe $\vec{E}_t = E_{0t} e^{i(\omega t - \underline{k}x)} \vec{u}_y$; $\underline{k} \in \mathbb{C}^*$.

6- On suppose qu'autour d'un point M du métal, la charge volumique ρ à l'instant $t = 0$ est non nulle et égale à ρ_0 . En utilisant l'équation locale de la conservation de la charge et l'équation de Maxwell Gauss, déterminer l'évolution temporelle de $\rho(M, t)$. Conclure.

7- Comment expliquer que dans un milieu localement neutre, il peut y avoir du courant c'est-à-dire des charges animées d'un mouvement d'ensemble?

8- Sachant que $\omega < 10^{11} \text{ rd.s}^{-1}$, simplifier alors l'équation de Maxwell-Ampère.

9- Écrire les équations de Maxwell dans le conducteur étudié.

En déduire l'équation de propagation $\Delta(\vec{E}_t) - \gamma \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}_t) = \vec{0}$.

10- Commenter le résultat en le comparant à l'équation de propagation obtenue en 2-. Que laisse présager la présence d'une dérivée d'ordre impair ?

11- Trouver la relation de dispersion sous la forme $\underline{k}^2 = -i \frac{2}{\delta^2}$ donner l'expression et l'unité de δ . En déduire $\underline{k}$.

12- À quoi correspond la partie réelle de $\underline{k}$? Qu'en est-il de sa partie imaginaire ? Montrer alors que $\vec{E}_t = E_{0t} e^{-\frac{x}{\delta}} \cos(\omega t - \frac{x}{\delta}) \vec{u}_y$. En déduire l'expression du champ magnétique $\vec{B}_t$.

13- Nommer le phénomène observé puis expliquer son origine physique. Calculer δ et la longueur d'onde λ_c dans le conducteur pour les fréquences $f = 50\text{Hz}$ et 1GHz .

14- Exprimer la vitesse de phase $v_\varphi(\omega)$ et de groupe $v_g(v_\varphi)$. Y a-t-il ou non dispersion ?

15- Déterminer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting ($\vec{\Pi}_t$) et vérifier le bilan local d'énergie dans le conducteur.

Cas limite d'un conducteur parfait.

L'onde (O_i) rencontre maintenant en $x = 0$ et sous incidence normale un milieu conducteur parfait occupant tout le demi-espace $x > 0$.

16- Rappeler les propriétés d'un conducteur parfait (champs, charges et courants).

17- Justifier l'existence d'une OPPH réfléchie (O_r) de même fréquence que l'incidente.

18- Déterminer l'expression de son champ électromagnétique ($\vec{E}_r, \vec{B}_r$).

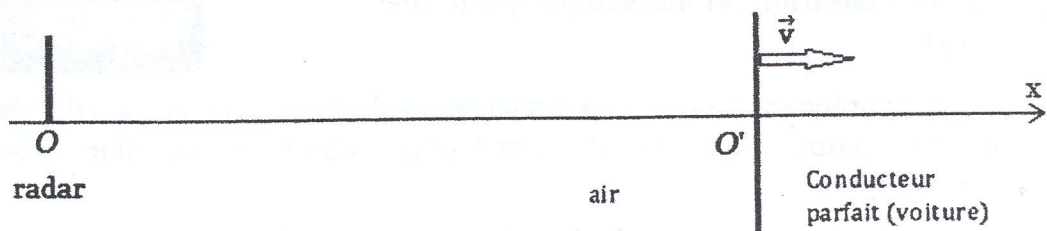
19- Calculer le coefficient de réflexion énergétique $\mathcal{R} = \frac{\|\langle \vec{\Pi}_r \rangle\|}{\|\langle \vec{\Pi}_i \rangle\|}$.

Partie B- Réflexion sur un conducteur parfait en mouvement- Effet Doppler

L'effet Doppler est la variation de la fréquence reçue d'une onde en fonction de la vitesse relative émetteur -récepteur : *si la distance entre émetteur et récepteur diminue, la fréquence perçue est plus élevée que la fréquence émise par l'émetteur, et inversement.*

20- Citer un exemple de la vie courante illustrant l'effet Doppler.

Une plaque métallique parfaitement conductrice, plane et perpendiculaire à (Ox) se déplace à la vitesse uniforme $\vec{v} = v\vec{u}_x$; elle coïncide à l'instant t avec le plan d'équation $x = vt$. Une onde (O_i) de champ électrique $\vec{E}_i = E_{0i} e^{i(\omega_i(t-\frac{x}{c}))} \vec{u}_y$ se réfléchit sur cette surface, le champ électrique de l'onde réfléchie (O_r) s'écrit $\vec{E}_r = E_{0r} e^{i(\omega_r(t+\frac{x}{c}))} \vec{u}_y$



Pour exprimer la réflexion de l'onde et vérifier les conditions aux limites, il convient d'étudier la réflexion dans le référentiel $\mathcal{R}'(O', \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ lié au conducteur en translation par rapport à $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ fixe. On note $(\vec{E}, \vec{B})$ le champ électromagnétique dans $\mathcal{R}$ et $(\vec{E}', \vec{B}')$ le même champ évalué dans $\mathcal{R}'$.

21- Admettons l'invariance de la force de Lorentz. Montrer que $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}$ et $\vec{B}' = \vec{B}$.

22- Exprimer $\vec{E}_i'$ en fonction de $E_{0i}, c, \omega_i, t, x$ et v .

23-Exprimer $\vec{E}_r'$ en fonction de E_{0r} , c , ω_r , t , x et v .

24-En utilisant la continuité du champ $\vec{E}'$ sur l'interface $x_0 = vt$ exprimer E_{0r} en fonction de E_{0i} , v et c puis ω_r en fonction de ω_i , v et c .

25- En déduire le coefficient de réflexion énergétique $\mathcal{R} = \frac{\|\langle \vec{\Pi}_r \rangle\|}{\|\langle \vec{\Pi}_i \rangle\|}$. Commenter.

26- Montrer que dans le cas où $v \ll c$, la fréquence de l'onde réfléchie s'exprime de manière approchée $f_r \cong f_i \left(1 - \frac{2v}{c}\right)$. On notera $f_D = f_i - f_r = f_i \frac{2v}{c}$ la fréquence Doppler.

Application : Radar de la police

Un véhicule (assimilé à un conducteur parfait) circulant en zone d'agglomération (vitesse limitée à 50 km/h) est contrôlé par un radar Doppler de la police ($f_i \sim 1 \text{ GHz}$). Au passage du véhicule l'onde écho est de fréquence f_r . On suppose que l'angle entre l'axe du faisceau radar et l'axe de déplacement du véhicule mesuré est nul.

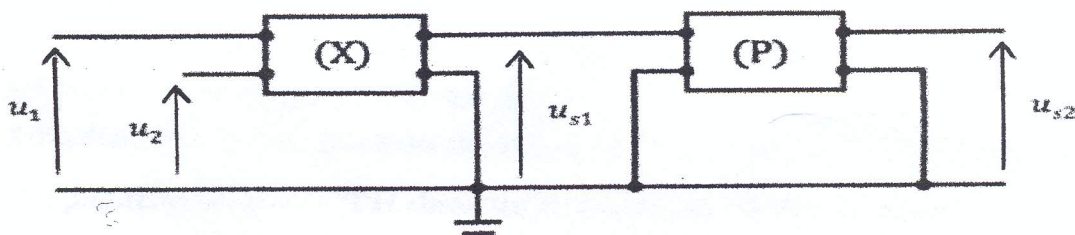
27- Calculer la longueur d'onde λ_i de l'onde émise. En déduire à partir de quelle distance d peut-on se situer dans la zone de rayonnement du radar ?

Au niveau de l'antenne du radar, on dispose de deux tensions sinusoïdales correspondant aux ondes électromagnétiques émise et réceptionnée par le radar.

On note $u_1(t) = u_{m1} \cos(2\pi f_i t)$ et $u_2(t) = u_{m2} \cos(2\pi f_r t + \varphi)$.

Le schéma de principe de la mesure du décalage en fréquence est donné ci-dessous.

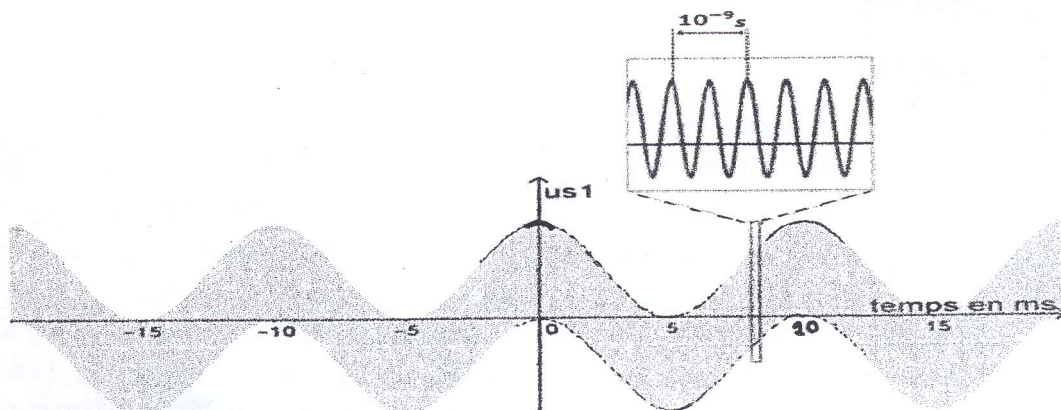
Le multiplieur (X) réalise l'opération : $u_{1s}(t) = K u_1(t) u_2(t)$ où K est une constante en V^{-1}



28-Donner l'allure du spectre en amplitude de la tension $u_{s1}(t)$.

29- Le multiplieur est-il un composant linéaire ? Justifier.

30- Quelle doit-être la fonction du quadripôle (P) pour obtenir une tension de sortie sous la forme $u_{s2}(t) \cong K' \cos(2\pi f_D t + \varphi')$? Proposer un circuit électrique pour ce quadripôle. On donne ci-dessous la courbe de $u_{s1}(t)$ et un zoom sur une petite portion de celle-ci.



31- Justifier l'allure de cette courbe.

32- Représenter sur votre copie l'allure de la courbe $u_{s2}(t)$ en indiquant l'échelle de temps. Ce véhicule est-il en infraction ?

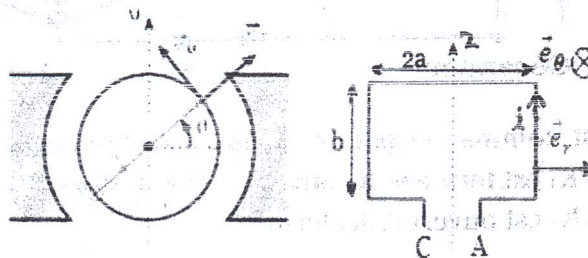
Problème II : Moteur à courant continu (09pts)

Les moteurs à courant continu à aimant permanent sont fréquemment utilisés. Ils transforment l'énergie électrique fournie par des batteries en énergie mécanique. On se propose, dans ce problème, d'étudier le principe de fonctionnement d'un moteur et le contrôle de sa vitesse de rotation.

Tous les composants électroniques sont supposés parfaits. Les amplificateurs opérationnels (AO) utilisés sont idéaux et fonctionnent en régime linéaire.

Partie A- Étude générale

Le rotor (ou l'induit) d'un moteur à courant continu est constitué de n spires rectangulaires enroulées sur un cylindre de même axe, de rayon a et de hauteur b . Cet ensemble se déplace dans l'entrefer d'un aimant (stator). Le champ magnétique créé par cet aimant est $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_r$.



Le rotor, initialement au repos, a une résistance $R = 0,24 \Omega$ et une inductance L . Il est connectée vers l'extérieur par l'intermédiaire de deux points A et C. On notera $J = 10^{-5} \text{ kg m}^2$ le moment d'inertie par rapport à l'axe (zz') de rotor et $\vec{\Omega}$, son vecteur rotation. Lors de la rotation, le rotor est soumis à un couple de frottement fluide dont le moment est du type $\vec{\Gamma}_f = -\beta \vec{\Omega}$ avec $\beta = 10^{-5} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$. Un générateur impose une tension constante $U = V_A - V_C > 0$. On notera $i(t)$ le courant électrique circulant dans le rotor.

- 1-a- Montrer que le couple de Laplace $\vec{\Gamma}_L = \phi_0 i(t) \vec{e}_z$ avec ϕ_0 est fonction de B_0, a, n et b .
- 1-b- Justifier l'apparition d'une f.é.m induite $e(t)$ dans rotor.
- 1-c- Montrer que $e(t) = -\phi_0 \Omega(t)$.
- 2- Ecrire l'équation électrique du système liant $e(t), U, R, L$ et $i(t)$.
- 3- Un couple résistant $\vec{\Gamma}_r = -\Gamma_r \vec{e}_z$ est appliqué ($\Gamma_r > 0$) en plus du couple de frottement (c'est l'opposé du couple que le rotor exerce sur l'objet qu'il doit mettre en rotation). Ecrire alors l'équation mécanique liant $J, \Gamma_L, \Gamma_r, \Gamma_f$ et $\Omega(t)$.
- 4- Expliquer le comportement du moteur lorsque on annule la tension ($U = 0$).
- 5- On néglige, dans cette question, la tension aux bornes de l'inductance L .

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par Ω et déduire que $\Omega(t) = \Omega_{lim} (1 - e^{-t/\tau})$ on exprimera Ω_{lim} et τ en fonction des paramètres du problème.

- 6- On se place en régime nominal établi (permanent) caractérisé par une tension $U_{nom} = 12 \text{ V}$, une intensité $I_{nom} = 2,5 \text{ A}$ et une vitesse $\Omega_{nom} = \Omega_{lim} = 3000 \text{ tr. mn}^{-1}$

- 6-a- Montrer que $\phi_0 = \frac{U_{nom} - R I_{nom}}{\Omega_{lim}}$ et $\Gamma_r = \phi_0 I_{nom} - \beta \Omega_{lim}$

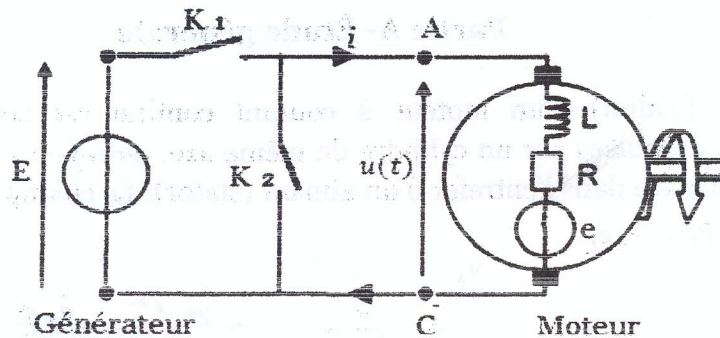
- 6-b- Calculer alors ϕ_0, Γ_r et τ .

- 6-c- Calculer le courant i_d au démarrage si la tension est égale à U_{nom} . Commenter.

6-d- Quelle est, au démarrage, la tension minimale U_{dmin} nécessaire pour entrainer le moteur ?

Partie B - Commande du moteur

Dans cette partie, on suppose que le moteur tourne à une vitesse constante Ω . Il est alimenté par le circuit ci-dessous. La tension et le courant de l'induit ne sont plus continus : $u(t)$ et $i(t)$ sont des fonctions périodiques du temps. On donne $E = 12 \text{ V}$.



L'interrupteur K_1 est commandé par un signal rectangulaire de période T_c telle que :

- si $0 < t \leq \alpha T_c$ alors K_1 est fermé et K_2 ouvert avec $0 < \alpha < 1$
- si $\alpha T_c < t \leq T_c$ alors K_1 est ouvert et K_2 fermé

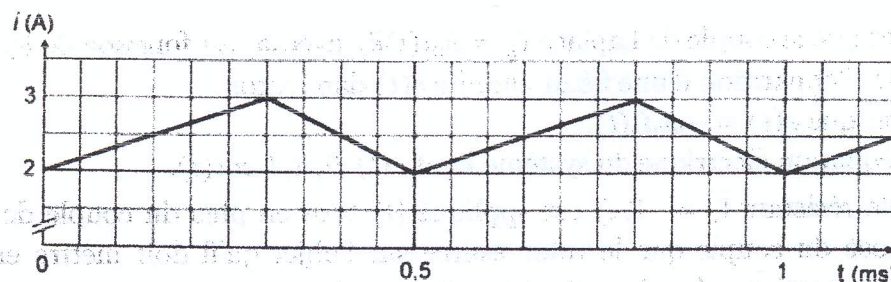
7- Justifier que $u(t) = \begin{cases} E & \text{si } 0 < t \leq \alpha T_c \\ 0 & \text{si } \alpha T_c < t \leq T_c \end{cases}$ puis calculer sa valeur moyenne $\langle u(t) \rangle$.

On négligera, dans la suite de cette partie, la résistance R de l'induit.

8-a- Montrer que e et Ω sont proportionnelles à α .

8-b- Conclure sur les intérêts du circuit ci-dessus.

La figure ci-dessous présente l'évolution temporelle de $i(t)$. On désigne par I_{max} et I_{min} les valeurs maximale et minimale de $i(t)$.



9-a- Etablir l'expression littérale de $i(t)$ pour $0 < t < T_c$.

9-b- Montrer que l'ondulation du courant $\Delta I = I_{max} - I_{min} = \alpha(1 - \alpha) \frac{ET_c}{L}$.

9-c- Dans la pratique, on ajoute une bobine en série avec le rotor. Quel est son rôle?

10-a- A partir du graphe, déterminer α et L .

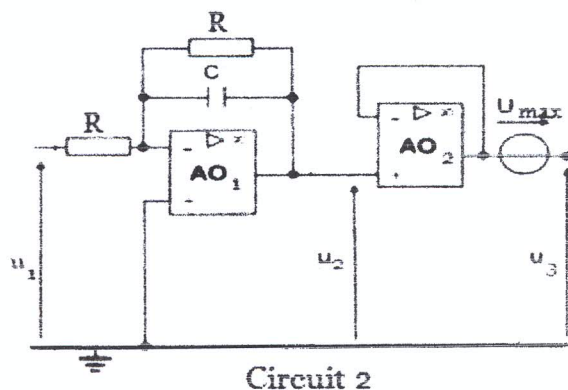
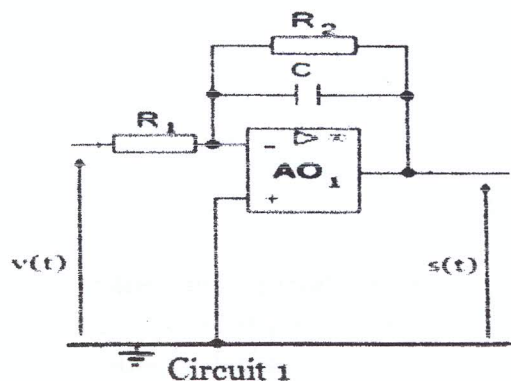
10-b- En déduire les valeurs de e et Ω .

10-c- Déterminer $\langle i(t) \rangle$.

10-d- Vérifier que la chute de tension aux bornes de R est négligeable.

Partie C - Mesure de la vitesse de rotation

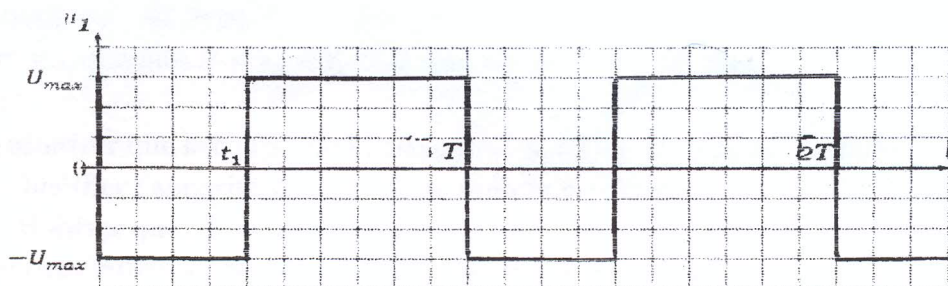
On excite le circuit 1 de la figure ci-dessous par une tension $v(t) = V_m \cos(\omega t)$ et on mesure à vide la tension de sortie $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$.



- 11-a-** Montrer que la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{s(t)}{v(t)} = \frac{H_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$ où ω_0 et H_0 sont des constantes fonctions de R_1, R_2 et C .
- 11-b-** Déterminer la nature du filtre et calculer le gain $G(\omega)$.
- 11-c-** Commenter le comportement du filtre pour $\omega \ll \omega_0$ et $\omega \gg \omega_0$.
- 11-d-** Tracer, pour $|H_0| > 1$, le diagramme de Bode en gain $G_{dB} = 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$.

On considère dans la suite le circuit 2

La tension $u_1(t)$, appliquée à l'entrée du filtre, est un signal T -périodique délivré par un capteur de vitesse. La fréquence f du signal est proportionnelle à la vitesse de rotation. On donne ci-dessous l'évolution temporelle de $u_1(t)$.



La décomposition en série de Fourier de $u_1(t)$ est donnée par :

$$u_1(t) = \langle u_1(t) \rangle \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha\pi)}{n\alpha\pi} \cos(n\omega t - n\alpha\pi) \right] \text{ où } \alpha = \frac{t_1}{T}$$

12- Calculer $\langle u_1(t) \rangle$.

13-a- Tracer le spectre en amplitude de $u_1(t)$ (3 premiers harmoniques) pour $\alpha = \frac{2}{5}$.

13-b- Déterminer les fréquences absentes dans le spectre de $u_1(t)$ pour $\alpha = \frac{2}{5}$.

14- Sachant que $f \gg f_0$, exprimer $u_2(t)$ à la sortie du filtre en fonction de T, t_1 et U_{max} .

15- Quelle est la fonction de AO_2 ?

16- Déterminer $u_3(t)$ (dans le cas $f \gg f_0$) et expliquer pourquoi ce circuit permet d'accéder à la vitesse de rotation ?

****Fin de l'épreuve****