

Institut préparatoire aux études de l'ingénieur de SFAX

Examen de PHYSIQUE (PT 2)

Jeudi 12 Mai 2022 de 08h30 à 12h30

Barème :

Problème I : 7,5 pts

Problème II : 05 pts

Problème III : 7,5 pts

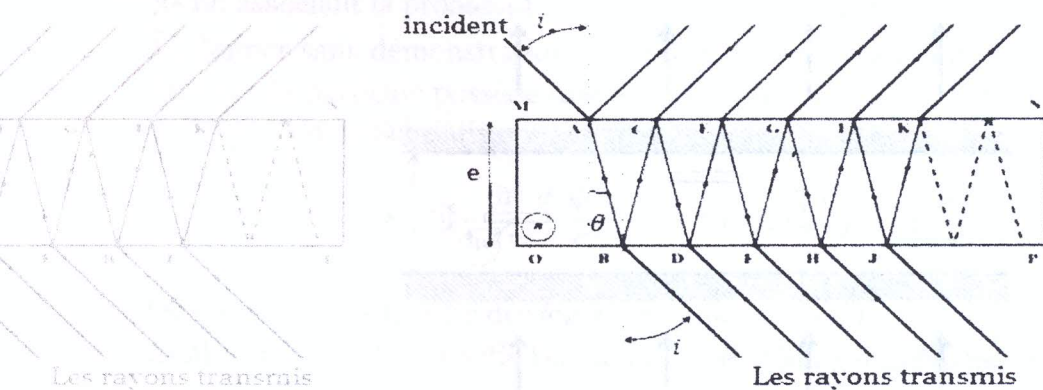
Notation : Le symbole $\equiv$ signifie égal par définition.

Problème I : Contraste interférentiel

Donnée : $\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2(x)$

Considérons une onde plane, d'amplitude A_0 , et de longueur d'onde $\lambda = 0,546 \mu\text{m}$, qui tombe sur une lame mince, d'épaisseur e et d'indice n , en faisant un petit angle i avec la normale. Cette onde se propageant dans la cavité ainsi formée émet à chaque aller-retour un rayon émergent. Les rayons émergents par transmission sont parallèles entre eux et s'interfèrent à l'infini. L'amplitude complexe en un point à l'infini du $k^{\text{ème}}$ rayon transmis s'écrit $A_k e^{-j\phi_k}$ où A_k est l'amplitude du rayon k et ϕ_k sa phase. L'ensemble baigne dans l'air d'indice $n_0 = 1$.

Les deux faces de verre semi-argentées peuvent être considérées comme deux miroirs semi réfléchissants dont le coefficient de réflexion en amplitude du dioptré milieu $\rightarrow$ air est noté r (nombre réel positif inférieur à 1). De même, on désigne par τ et τ' les coefficients de transmission en amplitude des dioptrés milieu $\rightarrow$ air et air $\rightarrow$ milieu respectivement. On pose $T = \tau\tau' = 1 - r^2$.



- 1- Montrer que le déphasage ϕ entre deux rayons transmis successifs vaut $\phi = \frac{4\pi}{\lambda} n e \cos \theta$.
- 2- Calculer le rapport des amplitudes de deux rayons transmis successifs $\frac{A_{k+1}}{A_k}$ en fonction du coefficient de réflexion en amplitude r .
- 3- En déduire l'amplitude complexe du $k^{\text{ème}}$ rayon transmis, en prenant comme origine des phases, celle du premier rayon transmis.
- 4- Calculer l'amplitude complexe A_{tot} en un point M à l'infini résultant de la superposition de l'ensemble des rayons émergents de $k = 1$ à ∞ .

5- Montrer que l'intensité recueillie à l'infini $I(\phi) = |A_{tot}|^2$ peut se mettre sous la forme

$$I(\phi) = \frac{I_0}{1+m \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)} \text{ où } m \text{ sera exprimé en fonction de } r, \text{ et } I_0 \text{ en fonction de } A_0, r \text{ et } T.$$

6- Pour $r = 0,9$, calculer m .

7- Déterminer les valeurs de ϕ qui correspondent à un maximum de $I(\phi)$. Que vaut I_{max} , la valeur de ces maxima ?

8- Evaluer la valeur et les positions des minima de $I(\phi)$.

9- Calculer les valeurs de ϕ autour d'un maximum, tel que $I = \frac{I_{max}}{2}$.

10- En déduire la largeur à mi-hauteur $\Delta\phi_{\frac{1}{2}}$ du pic correspondant que l'on exprimera en fonction de m . Simplifier en tenant compte de la valeur de m .

11- Tracer l'allure de $I(\phi)$.

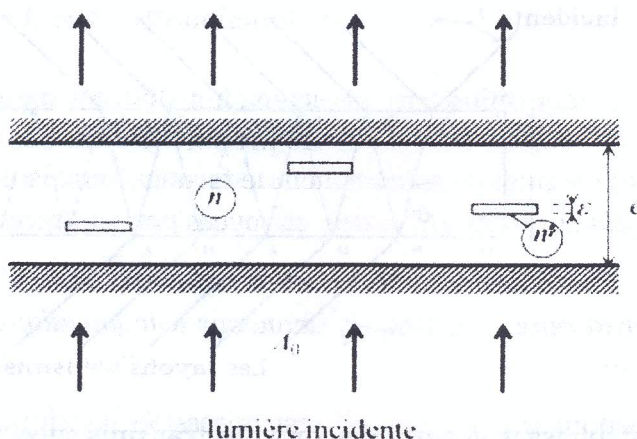
12- Décrire l'aspect du champ observé.

13- Exprimer le coefficient de finesse des franges défini par $F = \frac{2\pi}{\Delta\phi_{\frac{1}{2}}}$

14- Déterminer F pour un interféromètre à deux ondes comme les trous d'Young. Conclure.

Observation en présence de détails.

Sur la platine d'un microscope est posée une préparation très mince transparente, immergée dans un liquide d'indice n et comprise entre deux lamelles de verre identiques dont les faces en regard, semi-argentées, sont parallèles. Les détails de la préparation peuvent être assimilés à de petites lames à faces parallèles d'indice n' d'épaisseur ε très faible, parallèles aux faces semi-argentées. L'ensemble est éclairé par transmission en incidence normale par un faisceau parallèle de lumière monochromatique (raie verte d'une lampe spectrale à mercure $\lambda = 0,546\mu m$).



Les réflexions sur les faces d'un détail sont négligeables si bien qu'un rayon lumineux traversant un détail peut être considéré comme transmis intégralement en amplitude (pas d'absorption par le détail).

15- Montrer que le déphasage entre deux rayons transmis successifs, mais dans une zone comportant un détail peut s'exprimer comme $\phi' = \phi + \Delta\phi$ avec $\Delta\phi$ dépendant uniquement de n, n', ε et λ .

16- Calculer $\Delta\phi$ pour une préparation d'indice $n = 1,515$ contenant un détail d'épaisseur $\varepsilon = 0,6 \mu\text{m}$ et d'indice de réfraction $n' = 1,520$.

Remarquer que la valeur de $\Delta\phi$ est petite par rapport à celle donnant ϕ .

17- Que devient l'intensité transmise $I' = I'(\phi')$ dans une zone comportant un détail ?

18- Le contraste C de l'image du détail par rapport au fond étant défini par $C = \frac{I-I'}{I}$.

Montrer que $C = \frac{m}{2} \frac{\sin\phi}{1+m \sin^2(\frac{\phi}{2})} \Delta\phi$.

19- L'épaisseur de la préparation e est choisie de manière à ce que $\phi = \frac{\pi}{2} + 2p\pi$ (avec p nombre entier). Pour $m = 90$ et sachant que l'œil humain décèle un contraste minimal de 0,1, le détail est-il visible ?

20- Pour quelle(s) valeur(s) de ϕ , donc de l'épaisseur e , le contraste est-il maximal ?

21- Quelle est alors l'épaisseur minimale d'un détail décelable (donner un ordre de grandeur) ?

22- Proposer une méthode expérimentale pour rendre un détail suffisamment contrasté afin d'être observé.

Problème II : Enrichissement isotopique

Donnée : Pour $x \ll 1$, on a $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^3)$

Une particule quantique (quanton) est localisée sur l'axe (O, x) . L'état quantique de cette particule est caractérisé par une fonction d'onde à valeurs complexes $\psi(x, t)$.

1- Rappeler le postulat de Born donnant la probabilité dP que la particule se trouve dans l'intervalle $[x, x + dx]$ à l'instant t . En déduire la dimension de $\psi(x, t)$.

2- Quelle est la signification physique de $\rho = |\psi(M, t)|^2$? Interpréter la propriété $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(M, t)|^2 = 1$.

3- En associant la probabilité de présence à un courant de probabilité, de vecteur densité $\vec{J}$, donner sans démonstration l'équation de conservation de la probabilité de présence. Lorsque la particule possède une énergie potentielle $V(x)$, la fonction $\psi(x, t)$ est solution de l'équation de Schrödinger non relativiste :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t}$$

On cherche dans la suite des états stationnaires $\psi(x, t) = \phi(x)f(t)$, d'énergie E .

4- Montrer que $\phi(x)$ vérifie l'équation de Schrödinger indépendante du temps

$$\phi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x))\phi(x) = 0$$

5- Déduire que $f(t) = e^{-i\omega t}$ où ω est une fonction de l'énergie E .

6- Que peut-on dire de la probabilité de présence dP ?

On définit une particule libre comme étant une particule de masse m , d'impulsion $\vec{p}$ évoluant dans une région d'énergie potentielle $V(x)$ nulle.

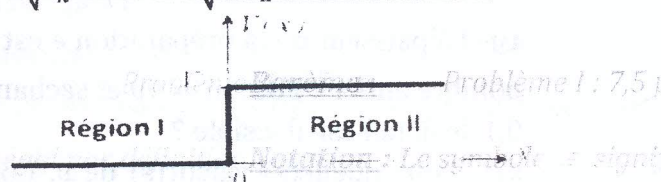
7- Montrer que sa fonction d'onde $\psi(x, t)$ est la somme de deux ondes planes se propageant

en sens inverses. Définir le vecteur d'onde $\vec{k}$ que l'on peut associer à cette particule.

8- Déterminer la relation entre $\vec{p}$ et $\vec{k}$. Comment s'appelle cette relation ?

On considère maintenant un flux de particules, de masse m et d'énergie E , qui venant de $-\infty$ arrive sur une marche de potentiel de hauteur V_0 .

On suppose que l'énergie $E > V_0$ et on pose $k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ et $q = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}$.



9- Décrire le comportement classique des particules.

10- Montrer que $\psi(x, t) = A e^{i(k_1 x - \omega t)} + B e^{-i(k_1 x + \omega t)}$ dans la région I où A et B sont des constantes d'intégration que l'on ne cherchera pas à déterminer.

11- Justifier que $\psi_t(x, t) = C e^{i(qx - \omega t)}$ dans la région II.

12- Écrire les relations de raccordement en $x = 0$.

13- Déterminer les courants de probabilité $\vec{j}_{in}$, $\vec{j}_r$ et $\vec{j}_t$ associés à l'onde incidente, réfléchie et transmise, respectivement.

14- En déduire les coefficients de réflexion $R \equiv |\frac{j_r}{j_i}|$ et de transmission T caractérisant cette marche d'énergie potentielle en fonction de k_1 et q .

15- Montrer que dans le cas limite $E \gg V_0$, on a $R \approx \frac{V_0^2}{16E^2}$.

16- Dans la situation où $E < V_0$, l'expression de la fonction d'onde propre dans la région I peut être conservée. Expliquer cependant comment est modifié q . En déduire alors l'expression de la probabilité de réflexion R . Commenter.

17- Tracer le graphe de R en fonction de E .

Une source envoie, depuis $-\infty$, un faisceau de particules quantiques, constitué d'un mélange de deux isotopes de proportions c_1 et $1 - c_1$. On note m_1 et $m_2 < m_1$ les masses des deux isotopes qui forment le faisceau de particules quantiques incidentes. Toutes ces particules quantiques sont envoyées avec la même vitesse v_0 . On se placera dans le cas limite $E \gg V_0$.

On souhaite utiliser la réflexion, sur la marche de potentiel, pour modifier la composition isotopique du mélange.

18- Expliquer pourquoi il est nécessaire que l'énergie E des particules quantiques soit supérieure à la hauteur de la marche de potentiel V_0 , si l'on veut modifier la composition isotopique du mélange.

19- Expliquer pourquoi les coefficients de réflexion R_1 et R_2 diffèrent pour les deux isotopes et exprimer le rapport R_1/R_2 en fonction du rapport des masses m_1/m_2 .

20- Trouver la concentration c'_1 du mélange réfléchi en fonction de c_1 , R_1 et R_2 . Calculer le taux d'enrichissement en particules légères pour un mélange hydrogène-deutérium sachant que $c_1 = 0,81$.

Problème III : Refroidissement magnétique

Formulaire : On appelle sinus et cosinus hyperbolique de la variable réelle t , les fonctions :

$$\operatorname{sh}(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \quad \operatorname{ch}(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$$

La fonction tangente hyperbolique de la variable réelle t est définie par $\operatorname{th}(t) = \frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)}$

On rappelle également que $\frac{d}{dt}(\operatorname{th}(t)) = 1 - \operatorname{th}^2(t)$ et $\operatorname{th}(t) \sim_0 t + o(t^3)$

Soit $f(x, y)$ une fonction dérivable à valeurs réelles définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$. La différentielle df est donnée par: $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$

Les réfrigérateurs domestiques utilisent un fluide qui subit des cycles de compression/décompression permettant d'extraire de la chaleur d'une source froide pour en réinjecter dans une source chaude (l'environnement).

Dans ce problème, nous montrons qu'un cycle d'aimantation/désaimantation d'un système magnétique (solide paramagnétique) permet également la conversion d'énergie magnétique en chaleur. En présence d'un champ magnétique extérieur, les ions du solide présentent une aimantation que l'on cherchera à exprimer en première étape.

1- Considérons une spire de courant circulaire, traversée par un courant d'intensité I , dont la surface Σ est orientée par un vecteur unitaire normal $\vec{n}$. Le moment magnétique associé est défini par $\vec{\mu} = I \Sigma \vec{n}$. Plongé dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}$, le circuit subit grâce à un couple de force $\vec{\Gamma} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$ une action qui tend à aligner le moment magnétique avec le champ magnétique.

a- Montrez qu'il existe deux positions d'équilibre.

b- Tracez le graphe de l'énergie potentielle magnétique $E_m = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ en fonction de l'angle $\theta = (\vec{\mu}, \vec{B})$.

c- Retrouver les positions d'équilibre et préciser leur stabilité.

Nous considérons un modèle simple de cristal paramagnétique : N ions identiques sur un réseau, soumis à un champ magnétique $\vec{B}$. Chaque ion peut occuper soit :

- l'état $|1\rangle$ d'énergie $E_1 = -\mu_p B$

- l'état $|2\rangle$ d'énergie $E_2 = \mu_p B$ avec $\mu_p > 0$ est l'aimantation d'ion dans l'état $|1\rangle$.

Les interactions entre les ions sont supposées négligeables. Le solide, en équilibre thermique à la température T , obéit à la statistique de Boltzmann que l'on rappelle ici : soit E_i l'énergie d'un état $|i\rangle$ tel que $i \in \{1, 2\}$, alors le nombre N_i de particules occupant cet état (ou niveau de peuplement) est proportionnel à $e^{-\beta E_i}$, avec $\beta = \frac{1}{k_B T}$ et k_B désigne la constante de Boltzmann.

2- Montrez que la probabilité P_i d'occupation d'un état $|i\rangle$ peut s'écrire sous la forme $P_i = \frac{e^{-\beta E_i}}{z}$ où la quantité z , dite fonction de partition, permet de normaliser la distribution.

3- Montrer que $z = 2 \operatorname{ch}(x)$ où on exprimera la variable positive x en fonction de μ_p, B, k_B et T .

- 4- En déduire les expressions de N_1 et de N_2 en fonction de N et de x .
- 5- Vérifier la pertinence de ces deux expressions dans les cas limites : $x \rightarrow 0$ et $x \rightarrow \infty$. Pour cela, on les interprétera par rapport aux variations correspondantes de B et T qui sont susceptibles d'amener ces cas limites.
- 6- Calculer l'énergie moyenne $\langle E \rangle$ d'un ion ainsi que sa variance $var(E) = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$.
- 7- Déduire l'énergie moyenne U du solide.
- 8- Déterminer sa capacité calorifique à champ constant $C = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_B$.
- 9- Tracer C en fonction de x .
- 10- On désigne par $\vec{M}$ la somme des moments magnétiques des N ions. Montrer que l'aimantation moyenne par ion, $m \equiv \frac{1}{N} \|\vec{M}\| = \mu_p th(x)$.

Cette équation $m = m(B, T)$ joue le rôle d'une équation d'état.

- 11- Tracer $m(B)$ pour deux isothermes de températures T_1 et $T_2 < T_1$.
- 12- On se place dans le régime $x \ll 1$, montrer la loi de Curie : $m = \gamma \frac{B}{T}$ où γ est une constante spécifique du solide considéré.

On admet que l'entropie, par ion, $s \equiv k_B [\ln(z) + \beta \langle E \rangle]$

- 13-a- Vérifier que $s = k_B \phi(x)$ où $\phi(x) = -x th(x) + \ln(2ch(x))$
- b- Justifier qu'une transformation isentropique correspond à $\frac{B}{T} = cte$.
- c- Etudier s dans les cas limites $x \rightarrow 0$ et $x \rightarrow \infty$.

14- Nous étudions maintenant le cycle suivant :

- Transformation isotherme à T_1 allant de $B = 0$ à $B = B_1$.
- Transformation isentropique allant de $B = B_1$ à $B = B_2 < B_1$.
- Transformation isotherme à $T_2 < T_1$ allant de $B = B_2$ à $B = 0$.

a- Représenter le cycle dans le diagramme (m, B) .

b- Etablir l'expression du travail W reçu par le système pendant le cycle :

$$W \equiv - \oint B dm = k_B [T_1 \phi(x_1) - T_2 \phi(x_2)]$$

c- Exprimer la chaleur $Q_f > 0$ reçue par le système depuis la source froide.

d- Déduire l'expression de l'efficacité du cycle $\eta = \frac{Q_f}{W}$ en fonction de T_2 et T_1 .

15- On suppose que le solide utilisé dans la désaimantation suit la loi de Curie. Il est soumis à un champ magnétique de $B_i = 20 \text{ mT}$ et refroidi à une température $T_i = 350 \text{ mK}$ avant d'être isolé thermiquement. Le champ magnétique est lentement abaissé jusqu'à une valeur résiduelle de $B_f = 2,0 \text{ mT}$.

a- Calculer la différentielle ds de s .

b- Déterminez l'expression de la température T_f à la fin de cette transformation isentropique et calculez sa valeur.

Fin de l'épreuve