

Examen d'Algèbre - Semestre N°1
Sections : P.C.2 et P.T.2

Durée : 2h

Date : 02 Janvier 2024

Nombre de pages : 3

Problème 1/ (10 pts)

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'un endomorphisme f de E est cyclique s'il existe $V \in E$ tel que la famille $(V, f(V), \dots, f^{n-1}(V))$ soit une base de E .

On définit f^k par :

$$\begin{cases} f^k = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}} & \text{si } k \in \mathbb{N}^* \\ f^0 = id_E. \end{cases}$$

Partie 1/ Exemple 1

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1) Montrer que la matrice M est diagonalisable.

2) a) Montrer que $g^2 = g + 2id_{\mathbb{R}^3}$.

b) L'endomorphisme g est-il cyclique? Justifier.

Partie 2/ Exemple 2

Dans cette partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et on considère $\mathbb{R}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

Soit f une application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad f(P)(X) = P(X+1) - P(X).$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Soit $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, calculer $f(X^k)$.

- 3) En déduire que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est un polynôme non constant, alors $\deg(f(P)) = \deg(P) - 1$.
- 4) a) Vérifier que la famille $\{X^n, f(X^n), f^2(X^n), \dots, f^n(X^n)\}$ est libre.

b) Déduire que f est cyclique.

Partie 3/ Cas d'un endomorphisme diagonalisable

Dans cette partie, on considère un endomorphisme diagonalisable h d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On veut déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de h pour que cet endomorphisme soit cyclique.

Puisque h est diagonalisable, il existe une base $B = (v_1, \dots, v_n)$ de E formée de vecteurs propres de h . Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on note $\lambda_k \in \mathbb{C}$ la valeur propre associée au vecteur propre v_k .

On pose $V = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in E$, avec $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$.

1) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a : $h^p(V) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^p v_i$.

2) Soit $\mathcal{F} = \{V, h(V), h^2(V), \dots, h^{n-1}(V)\}$ une famille de vecteurs de E .

a) Ecrire $\text{mat}(\mathcal{F}, B)$, la matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{F}$ dans la base B .

b) Donner l'expression de $\det(\text{mat}(\mathcal{F}, B))$.

c) Conclure que h est cyclique, si et seulement si, il admet n valeurs propres distinctes.

(On peut considérer $V = \sum_{i=1}^n v_i$).

Problème 2/ (10 pts)

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre $n \geq 2$ à coefficients réels et $(E_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ sa base canonique.

Dans tout le problème, A est une matrice donnée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A . On considère φ_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\text{Pour tout } M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi_A(M) = AM - MA.$$

Partie 1/ Etude du cas $n = 2$

Dans cette partie, on prendra $n = 2$.

1) Vérifier que les matrices I_2 et A appartiennent à $\text{Ker}(\varphi_A)$.

Dans la suite, on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on suppose que $\varphi_A \neq \tilde{0}$ (c'est-à-dire que $A \neq \lambda I_2$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$).

- 2) Déterminer χ_A le polynôme caractéristique de A puis montrer que A est diagonalisable si et seulement si $(d-a)^2 + 4bc > 0$.
- 3) a) Donner la matrice de φ_A dans la base $(E_{11}, E_{22}, E_{12}, E_{21})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- b) Montrer que $\chi_{\varphi_A}(X) = X^2(X^2 - [(d-a)^2 + 4bc])$.
- c) Montrer que φ_A est diagonalisable si et seulement si $(d-a)^2 + 4bc > 0$.
- d) Dédire que φ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Partie 2/ Etude du cas général

On suppose dans cette partie que A est diagonalisable, on note $B_c = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ une base de vecteurs propres de A et λ_i valeur propre de A associée au vecteur c_i pour tout $1 \leq i \leq n$. Soit P la matrice de passage de la base B_c à la

base $\mathcal{C}$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

- 1) Montrer que pour tout couple $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$,

$$DE_{ij} - E_{ij}D = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij}.$$

(Ind : On peut écrire $D = \sum_{1 \leq k, l \leq n} d_{kl} E_{kl}$, où $d_{kl} = \delta_{kl} \lambda_k$ avec $\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{si } k = l \\ 0, & \text{si } k \neq l \end{cases}$.)

- 2) Pour tout couple (i, j) d'entiers tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, on pose :

$$B_{i,j} = PE_{ij}P^{-1}.$$

Montrer que B_{ij} est un vecteur propre de φ_A .

- 3) a) Montrer que $\psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto PMP^{-1}$ est un automorphisme.
- b) Montrer que $(B_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- c) En déduire que φ_A est diagonalisable.