

Devoir de Contrôle d'Analyse n. 1

Durée : 1 heure 30 minutes

On considère la fonction

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$$

Partie I.

- 1) Montrer que F est définie continue sur $[0, +\infty[$.
- 2) Prouver que F est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$.
- 3) Montrer que F vérifie une équation différentielle de second ordre à coefficients constants que l'on précisera.
- 4) Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

Partie II. On se propose d'étudier pour $x > 0$, la fonction

$$R(x) = \frac{1}{x} - \cos x \left(\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt \right) - \sin x \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt \right)$$

Pour cela, on pose

$$G(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt, \quad \text{et} \quad H(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt.$$

- 1) Montrer que la fonction $f : t \rightarrow \frac{e^{it}}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
- 2) En déduire que pour tout $x > 0$,

$$G(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt$$

et

$$H(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt - \int_1^x \frac{\sin t}{t^2} dt.$$

- 3) Déduire que G et H sont de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x > 0$,

$$G'(x) = -\frac{\cos x}{x^2} \quad \text{et} \quad H'(x) = -\frac{\sin x}{x^2}$$

4) Remarquons que

$$R(x) = \frac{1}{x} - \cos x \cdot G(x) - \sin x \cdot H(x).$$

a) Justifier que R est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x > 0$,

$$R'(x) = \sin x \cdot G(x) - \cos x \cdot H(x)$$

b) En déduire que R est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x > 0$,

$$R''(x) + R(x) = \frac{1}{x}$$

c) En utilisant la question 2), justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = 0$.

d) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = 0$

Partie III. On se propose de montrer que pour tout $x \geq 0$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos u}{(x + u)^2} du.$$

Pour cela, on pose pour $x > 0$,

$$K(x) = F(x) - R(x)$$

1) En utilisant les parties I et II, montrer que pour tout $x > 0$,

$$K''(x) + K(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} K(x) = 0.$$

2) Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle : $y''(x) + y(x) = 0$.

3) En déduire que pour tout $x > 0$, $K(x) = 0$ et que par la suite

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \frac{1}{x} - \cos x \left(\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt \right) - \sin x \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt \right)$$

4) Soit $x > 0$.

a) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos u}{(x + u)^2} du$ est convergente et que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos u}{(x + u)^2} du = \int_x^{+\infty} \frac{1 - \cos(t - x)}{t^2} dt$$

b) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos u}{(x + u)^2} du = F(x)$$

5) Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$. Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos u}{(x_n + u)^2} du \right) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos u}{u^2} du$$

6) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos u}{u^2} du = \frac{\pi}{2}.$$

7) Déduire par une intégration par partie que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$