



Examen d'Analyse - Semestre 1

Section : P.T.2

Durée : 2h

Date : 5 Janvier 2024

Nbre de pages : 2

Problème.

On désigne par F la fonction zêta alternée de Reimann, définie par

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

et on considère $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définie par

$$f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}.$$

Partie I

1. Montrer que F est définie sur $]0, +\infty[$.
2. En admettant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrer que $F(2) = \frac{\pi^2}{12}$.
3. Soit $y \in [0, 1[$.

(a) Vérifier que : $\ln(1+y) = \int_0^y \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n \right) dt.$

(b) En déduire que : $\ln(1+y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} y^n}{n}.$

(c) Montrer alors que $F(1) = \ln(2).$

Partie II

1. (a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$, pour tout $a > 0$.
(b) En déduire que F est continue sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.
3. Justifier que F n'est pas intégrable sur tout intervalle $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

4. Soit $a > 1$.

(a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, f_n est intégrable sur $[a, +\infty[$ et déterminer la valeur de $I_n = \int_a^{+\infty} |f_n(x)| dx$.

(b) Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^a \ln(n)}$ est convergente.

(c) En déduire que $G : x \rightarrow F(x) - 1$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ et que

$$\int_a^{+\infty} (F(x) - 1) dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^a \ln(n)}.$$

Partie III

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $u_n(x) = \ln(1 + e^{-nx})$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

On note $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$, sa somme totale.

2. La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$? Justifier votre réponse.

3. Montrer que S est continue sur $]0, +\infty[$.

4. Prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = F(1)$.

5. Soit $x > 0$. On pose $\psi_x : t \in [0, +\infty[\mapsto \ln(1 + e^{-xt})$.

(a) Justifier que ψ_x est intégrable sur $[0, +\infty[$.

(b) Démontrer que :

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\int_n^{n+1} \psi_x(t) dt \leq u_n(x).$$

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n(x) \leq \int_{n-1}^n \psi_x(t) dt.$$

(c) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \psi_x(t) dt \leq S(x) \leq F(1) + \int_0^{+\infty} \psi_x(t) dt.$$

(d) En utilisant la partie I, montrer que

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y} dy = F(2).$$

(e) À l'aide d'un changement de variable, déduire que,

$$\frac{F(2)}{x} \leq S(x) \leq F(1) + \frac{F(2)}{x}.$$

(f) Donner alors un équivalent de S au voisinage de 0^+ .

Bon Travail