

Institut Préparatoire aux Études d'ingénieur de SFAX

Département de Technologie

Section PT2

Examen de Physique 1

Date : 03 Janvier 2024

Durée : 4H

L'épreuve contient deux problèmes.

PROBLÈME I : Etude d'une guitare électrique

Les deux parties du problème I sont indépendantes.

On donne : * $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{X}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{X}) - \Delta\vec{X}$,
* célérité de lumière dans le vide : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$

I) Analogie entre une cavité résonante et la corde de guitare

A) Onde dans une cavité résonante

Q1- Ecrire les équations de Maxwell dans le vide, sans charges ni courants.

Q2- En déduire l'équation satisfaite par le champ électrique. Que représente le terme $\epsilon_0 \mu_0$ dans cette équation ?

Une onde électromagnétique arrive en incidence normale sur un conducteur parfait occupant le demi-espace $x > 0$ (Figure I.1).

On suppose que cette onde est plane progressive

monochromatique de pulsation ω . Le champ électrique

s'écrit en coordonnées cartésiennes et en représentation

complexe : $\vec{E}_i(x, t) = E_0 \exp(i(\omega t - kx)) \vec{u}_y$

où E_0 et k sont des constantes.

Q3- Quel est l'état de polarisation de cette onde ?

Donner la relation de dispersion.

Q4- Définir un conducteur parfait.

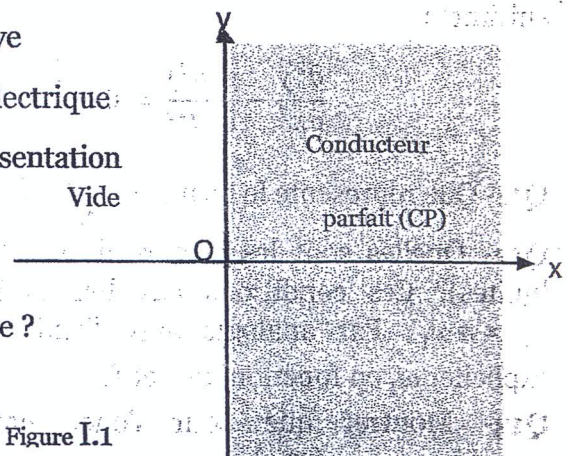
Figure I.1

Justifier que le champ électromagnétique à l'intérieur est nul. La présence du conducteur implique une réflexion de l'onde incidente. L'onde réfléchie est une onde monochromatique de même pulsation. On cherche alors le champ électrique réfléchi complexe sous la forme : $\vec{E}_r(x, t) = \vec{E}_{0r} \exp(i(\omega t + kx))$

Q5- Quelle est la polarisation de $\vec{E}_r$? En déduire $\vec{E}_{0r}$.

Q6- Déterminer l'expression réelle du champ électrique total $\vec{E}$. Quelle est la particularité de cette onde et son nom ?

Q7- Déterminer les positions des plans nodaux du champ électrique en fonction de la longueur d'onde.



Pour former la cavité résonante on ajoute un deuxième conducteur parfait placé dans le demi-espace $x < -\ell$ (Figure I. 2).

Q8- Quelle(s) autre(s) condition(s) la présence de ce deuxième conducteur parfait impose-t-elle au champ électrique $\vec{E}$?

Q9- Montrer que ceci impose une quantification de la pulsation des ondes pouvant s'établir dans la cavité :

$$\omega_n = n \omega_1 ; n \text{ est un entier non nul.}$$

Expliciter ω_1 en fonction de c et ℓ .

Q10- En déduire, que pour l'onde dans le mode n , le champ électrique dans la cavité prend la forme : $\vec{E}_n(x, t) = A \sin(\alpha x) \sin(\beta t) \vec{u}_y$ en explicitant A , α et β en fonction de E_0 , ω_1 , c et n .

B) Analogie avec la corde guitare

On assimile la corde de guitare à une corde inextensible sans raideur de masse linéique constante μ , tendue par une tension de module T . Au repos, elle se confond avec l'axe Ox (Figure I.3). On note ℓ la longueur de la corde placée entre les abscisses $x = -\ell$ et $x = 0$ où la corde est attachée. On étudie les vibrations de la corde dans le plan Oxy , c'est-à-dire les petits mouvements transversaux selon Oy , de part et d'autre de cette position de repos.

On cherche à utiliser l'analogie entre l'élongation $y(x, t)$ de la corde vibrante fixée à ses deux extrémités et le champ électrique dans une cavité résonante. On admet que $y(x, t)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

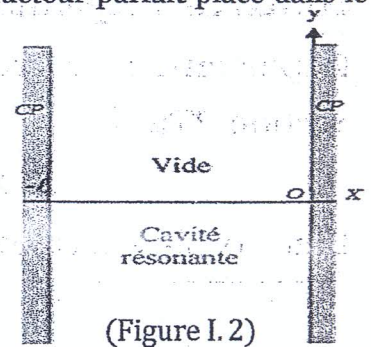
Q11- Que représente le terme $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$?

Q12- Quelles sont les valeurs de $y(x, t)$ aux extrémités de la corde (conditions aux limites)? Ces conditions aux limites imposent une quantification de la pulsation $\omega_n = n \omega_1$. Par analogie avec l'onde électromagnétique dans la cavité résonante, expliciter ω_1 en fonction de v et ℓ .

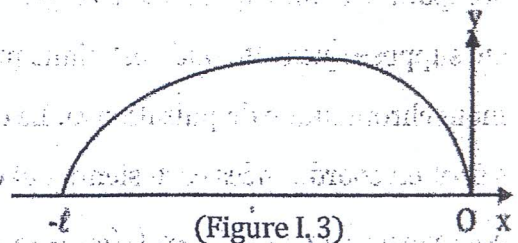
Q13- Montrer que pour l'onde harmonique de pulsation ω_n , l'expression : $y_n(x, t) = Y_{0n} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right) \sin(\omega_n t)$ est compatible avec l'équation de propagation et les conditions aux limites.

Q14- Dessiner l'allure de la corde à $t = \frac{\pi}{2\omega_n}$ pour $n = 1, 2$ et 3 .

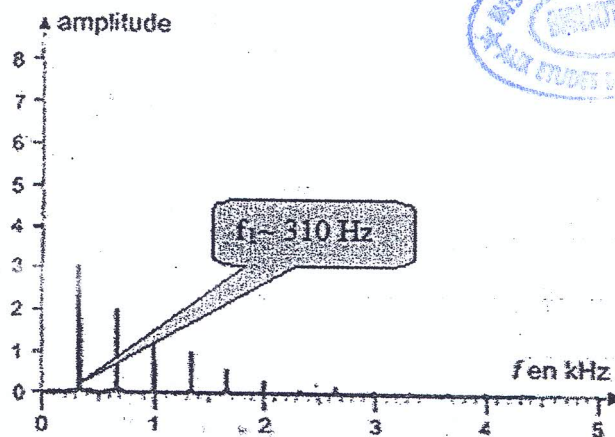
Q15- La guitare électrique est composée de six cordes métalliques de longueur $\ell = 63$ cm. La figure I.4 suivante correspond au spectre en fréquence du son produit par la corde n°6 d'une guitare électrique jouée à vide.



(Figure I. 2)



(Figure I. 3)



(Figure I.4)

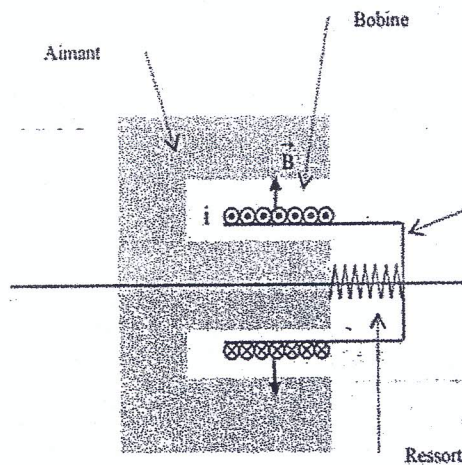
Déterminer les valeurs approchées de la fréquence f_1 du fondamentale et des fréquences f_2 et f_3 . En déduire la célérité des ondes dans cette corde.

II Microphone électrodynamique

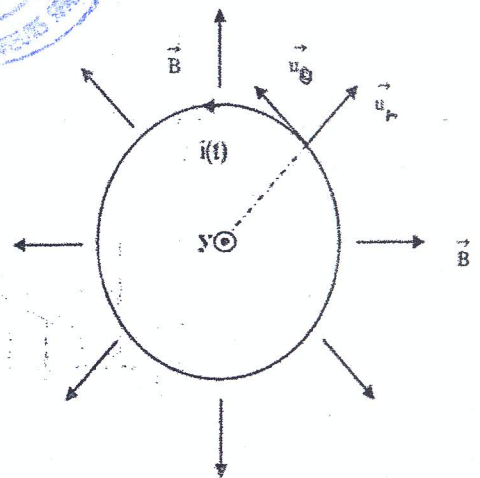
Situés sous les cordes, les microphones sont responsables à toute production du son. On se propose dans cette partie d'étudier quelques aspects de ce dispositif. En effet, le son fera vibrer une membrane solidaire d'une bobine mobile dans un champ magnétostatique. Le dispositif (d'axe de révolution $y'y$) est formé (voir figure II.1 en coordonnées cylindriques d'axe $y'y$) :

- d'un aimant permanent fixe qui crée un champ magnétostatique uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_r$ (figure II.2)
- d'une bobine, résistance R et de coefficient d'auto-inductance L , mobile indéformable comportant N spires circulaires de rayon a , placée dans l'entrefer de l'aimant annulaire et électriquement fermée sur elle-même.
- d'une membrane, assimilable à un disque de section S , solidaire de la bobine et pouvant effectuer des déplacements suivant l'axe $y'y$ du schéma.

La membrane est ramenée vers sa position d'équilibre par une force élastique modélisée par un ressort de raideur k , solidaire de l'aimant à une extrémité et solidaire de la membrane à l'autre extrémité. On supposera que la face droite de la membrane est soumise à une force pression $\vec{F}_p = -p(t)S\vec{u}_y$ où $p(t)$ est la surpression acoustique due au son ($p(t)$ pouvant être positive ou négative). L'ensemble mobile (membrane + bobine) de masse m est repéré par son abscisse $y(t)$. On supposera que pour $y = 0$, le ressort n'est ni tendu ni comprimé et que la surpression acoustique étant nulle. L'ensemble est soumis aussi à des frottements que l'on modélisera par la force $\vec{F}_f = -\beta \frac{dy(t)}{dt} \vec{u}_y$. On désigne par $\dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt}$ la dérivée temporelle de y .



(Figure II. 1)



(Figure II. 2)

Q16- Expliquer pourquoi, si la membrane bouge, il apparaît un courant électrique $i(t)$ dans la bobine.

Q17- Donner l'expression de la résultante $\vec{F}_L$ de la force de Laplace exercée par le champ magnétique sur la bobine en fonction de $N, a, i(t)$ et B .

Q18- Ecrire l'équation mécanique (E-M) du système.

Q19- Montrer que la force électromotrice dans la bobine $e(t) = 2\pi NaB\dot{y}(t)$.

Q20- Ecrire l'équation électrique (E-E) du système.

Q21- Effectuer un bilan de puissance en précisant la signification des différents termes.

On suppose que la surpression acoustique $p(t)$ est sinusoïdale de pulsation ω . En régime forcé, le courant $i(t)$ et le déplacement $y(t)$ seront donc eux aussi sinusoïdaux.

Q22- On posera $\underline{Z}_e = R + jL\omega$ et $\underline{Z}_m = \beta + j(m\omega - \frac{k}{\omega})$. Réécrire, en notation complexe, les équations (E-E) et (E-M).

Q23- Montrer, qu'en notation complexe, $\underline{i}(t) = \frac{X}{\underline{Z}_e \underline{Z}_m + Y} p(t)$ où on exprimera X et Y en fonction de N, a, B et S .

Q24- L'amplitude du courant dépend-elle de la fréquence ? Comment doit-on choisir les divers paramètres du problème pour que cela ne soit pratiquement pas le cas ? Quel serait alors l'intérêt ?

Dans son contexte d'utilisation, le microphone est relié à un amplificateur de résistance d'entrée R_A (figure II.3).

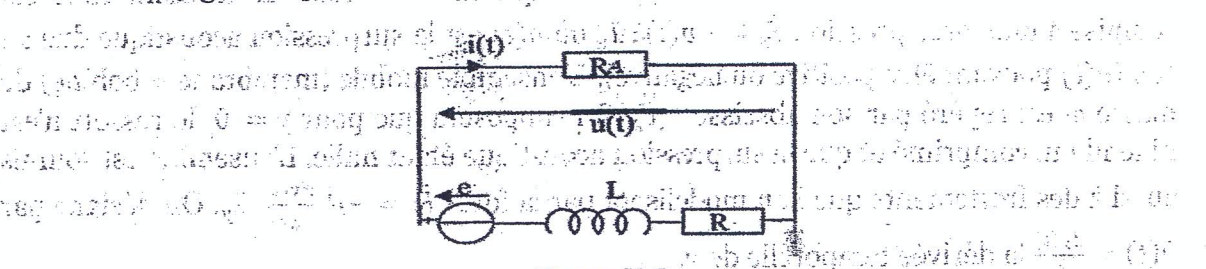


Figure II. 3

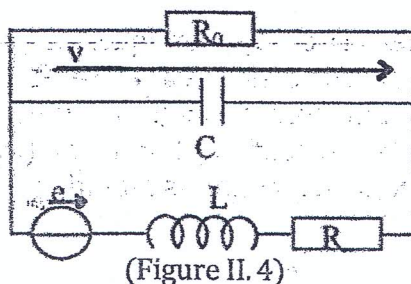
Q25- Montrer que l'équation différentielle liant $u(t)$ au flux ϕ_m de $\vec{B}$ à travers le bobinage du microphone (On ne demande pas le calcul de ϕ_m) s'écrit :

$$\frac{du}{dt} + \frac{R_A + R}{L} u(t) = -\frac{R_A}{L} \dot{y} \frac{d\phi_m}{dy}$$

Q26- On suppose que $y(t)$ est une fonction sinusoïdale : $y(t) = Y_0 \cos(\omega t) + Y_R$. On étudie le cas où $\frac{d\phi_m}{dy} = K$ avec K constante. Déterminer l'amplitude et le déphasage de $u(t)$ par rapport à $y(t)$ en régime établi.

Q27- Le signal issu du microphone comporte-il des harmoniques ?

En réalité, le comportement électrique du microphone est donné figure II.4. Le condensateur de capacité C et le dipôle ohmique de résistance R_0 sont dus à la présence de l'aimant. On donne $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ où $E_m = 20\text{mV}$.



(Figure II. 4)

Q28- Prévoir la nature du filtre sans calcul.

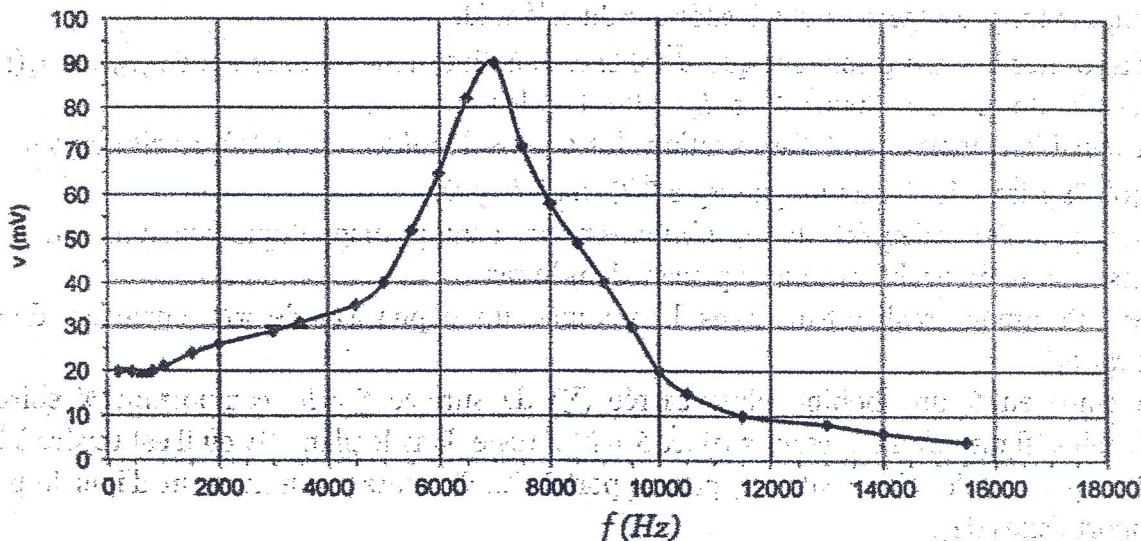
Q29- Déterminer la fonction de transfert complexe $\underline{H}(j\omega) = \frac{v}{e}$ et la mettre sous la forme canonique $\underline{H} = \frac{H_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite et Q le facteur de qualité. On

exprimera Q et la pulsation propre ω_0 en fonction de R_0, R, C et L .

Q30- Etablir la condition d'existence d'une résonance et déterminer la pulsation de résonance ω_r en fonction du facteur de qualité et de la pulsation propre.

Dans la suite on suppose que $Q^2 \gg 1$.

La réponse expérimentale du microphone est donnée par la courbe de la figure II.5 ci-dessous.



(Figure II. 5)

Q31- Estimer graphiquement les valeurs de H_0, f_0, Q et la bande passante Δf à -3dB .

Q32- La fréquence de résonance varie selon le type de microphone utilisé. Quel est l'effet sur le son restitué ?

PROBLÈME II: Moteur synchrone et asynchrone

Données : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$

$$\cos(p - q) - \cos(p + q) = 2 \sin(p) \sin(q)$$

Le stator d'un moteur est constitué de deux bobinages fixes (modélisés par des solénoïdes infinis). Il est alimenté par le secteur via une prise de courant classique ($f_0 = 50 \text{ Hz}$). Dans toute la suite, on se place dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires.

Q33- À quoi consiste l'approximation des régimes quasi-stationnaires ?

On considère deux solénoïdes (1) et (2) identiques, de rayon a , de grande dimension selon leurs axes, disposés de sorte que leurs axes respectifs ($x'x$) et ($y'y$) soient perpendiculaires et concourant au point O (figure 1). Ils comportent n spires par mètre et sont parcourus par les courants respectifs $i_1(t) = I_m \cos(\omega_0 t)$ et $i_2(t) = I_m \cos(\omega_0 t + \alpha)$ où $\omega_0 = 2\pi f_0$. Le sens de parcours des courants est indiqué sur la figure 1.

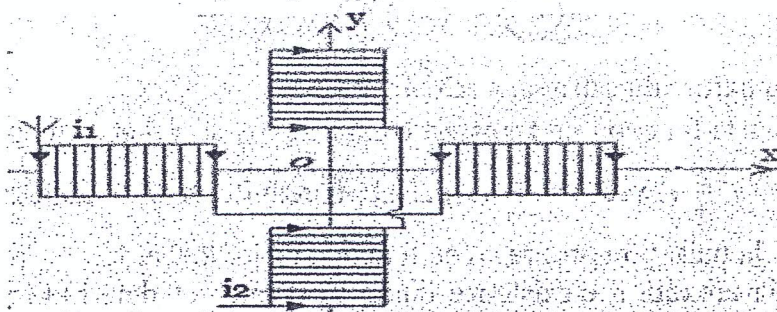


Figure 1

Q34- Dans un premier temps, on considère un seul solénoïde infini d'axe (Ox) de rayon a comportant n spires par mètre parcourues par un courant d'intensité $i_1(t)$. On admet que le champ magnétique est nul à l'extérieur du solénoïde.

Déterminer le champ magnétique $\vec{B}_1(M, t)$ créé à l'intérieur en fonction de μ_0, n et $i_1(t)$.

Q35- On donne $n = 8000 \text{ m}^{-1}$ et $I_m = 0,1 \text{ A}$. Calculer sa norme.

On considère maintenant l'association des deux solénoïdes (1) et (2) décrite ci-dessus

Q36- Exprimer le champ magnétique $\vec{B}(O, t)$ créé en O .

Pour quelle(s) valeur(s) de α , obtient-on un champ magnétique tournant en O ? Dans la suite du problème, on se placera dans le cas $\alpha = \pi/2$.

Q37- Comment réalise-t-on dans la pratique un déphasage de $\pi/2$ entre les deux courants ?

On place en O une bobine plate carrée (Σ) de surface $S = b^2$ comportant N spires orientées (figure 2). Le vecteur surface $S = b^2 \vec{n}$ reste dans le plan xOy où il est repéré à la date t par l'angle $\theta(t) = \omega t - \beta_0$ par rapport à Ox . On note J son moment d'inertie par rapport l'axe (Oz).

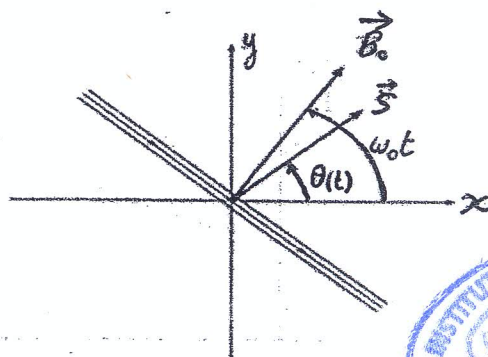
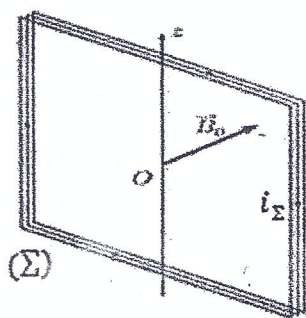


Figure 2



Cette bobine (Σ) possède une résistance R et une inductance propre L .

Le côté b de la bobine plate (S) est supposé très petit devant le rayon a des deux solénoïdes. Ainsi, le champ magnétique $\vec{B}(O,t)$ créé par les deux solénoïdes peut être supposé uniforme sur toute la surface S de la bobine (Σ), on le notera $\vec{B}_0$. Dans le plan xOy , il est repéré à la date t par l'angle $\omega_0 t$ (figure 2). En fonctionnement, cette bobine (Σ) entraîne le reste du dispositif en exerçant sur lui un couple $\vec{\Gamma}_c$. On négligera les frottements.

Pour alléger les notations, on pose : $\Omega = \omega_0 - \omega$ et $\phi_0 = NSB_0$.

Q38- La bobine (Σ) est alimentée par un courant continu d'intensité I_0 . Expliciter le couple de Laplace $\vec{\Gamma}_L(t)$ s'exerçant sur la bobine (Σ).

Cas d'un moteur synchrone ($\omega = \omega_0$)

Q39 - Exprimer $\langle \Gamma_L(t) \rangle$. Quelle condition doit-il vérifier l'angle β_0 pour que cette machine fonctionne effectivement en moteur ?

Quelle est, dans ce cas, la puissance moyenne $\mathcal{P}_0$ fournie par le moteur ?

Dans toute la suite on a $\omega < \omega_0$ et $\beta_0 = 0$

Contrairement à la partie précédente, la bobine n'est pas alimentée par un courant continu mais elle est fermée sur elle-même.

Q40- Énoncer la loi de Faraday. Justifier l'apparition d'une f.é.m. induite $e(t)$ (d'un courant induit $i(t)$) dans la bobine (Σ) du rotor.

Q41- Écrire l'équation électrique (E-E) vérifiée par le courant $i(t)$ circulant dans (Σ).

Q42- Écrire l'équation mécanique (E-M) vérifiée par l'angle $\theta(t)$.

Dans la suite du problème, on suppose le régime forcé établi : $\Omega = \text{constante}$.

On adopte dans le cas général la notation complexe : $\underline{z}(t) = Z_0 \exp(j(\omega t))$.

Q43- On note $i(t) = i_{\max} \sin(\Omega t - \psi)$ la solution de l'équation (E-E) en régime établi. En utilisant la notation complexe, montrer que $i(t) = \frac{\phi_0 \Omega}{\sqrt{R^2 + L^2 \Omega^2}} \sin(\Omega t - \arctan(\frac{L\Omega}{R}))$.

Q44- Exprimer le couple $\Gamma_L(t)$ en fonction de Ω et des données du problème.

Q45- Montrer que $\langle \Gamma_c \rangle = \frac{\Gamma_0(1-X)}{1+\lambda^2(1-X)^2}$ avec $X = \frac{\omega}{\omega_0}$. On exprimera λ et Γ_0 en fonction des données du problème.

Q46- On donne ci-dessous (Figure 3) l'allure de la courbe de $\frac{\langle \Gamma_c \rangle}{\Gamma_0}$ en fonction de X en prenant $\lambda = 4$. Le moteur peut-il démarrer seul ? Justifier.

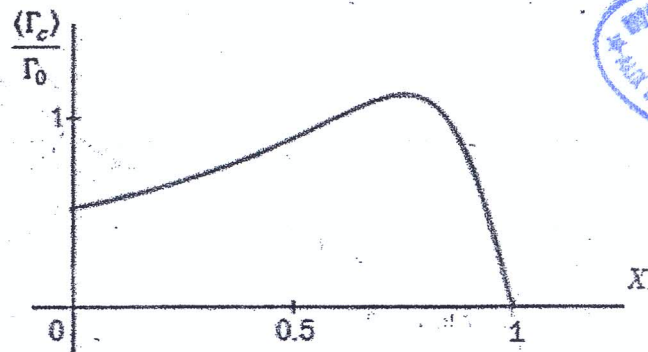


Figure 3

Q47- Le moteur doit entraîner une charge mécanique exerçant un couple résistant Γ_r connu. Justifier graphiquement qu'un ou deux points de fonctionnement, c'est-à-dire une ou deux vitesses de rotation ω , sont possibles. En raisonnant en termes de stabilité par rapport à Γ_r , justifier qu'un de ces deux points de fonctionnement n'est pas utilisable en pratique. Lequel et pourquoi ?

Q48- Exprimer la valeur moyenne temporelle $\langle \mathcal{P} \rangle$ de la puissance mécanique fournie par le moteur. Commenter l'expression obtenue.

Q49- On donne le tracé (figure 4) de la valeur moyenne temporelle $\langle \mathcal{P} \rangle$ en fonction de x d'un moteur d'une pompe à chaleur pédagogique de puissance $\langle \mathcal{P} \rangle = 75 \text{ W}$.

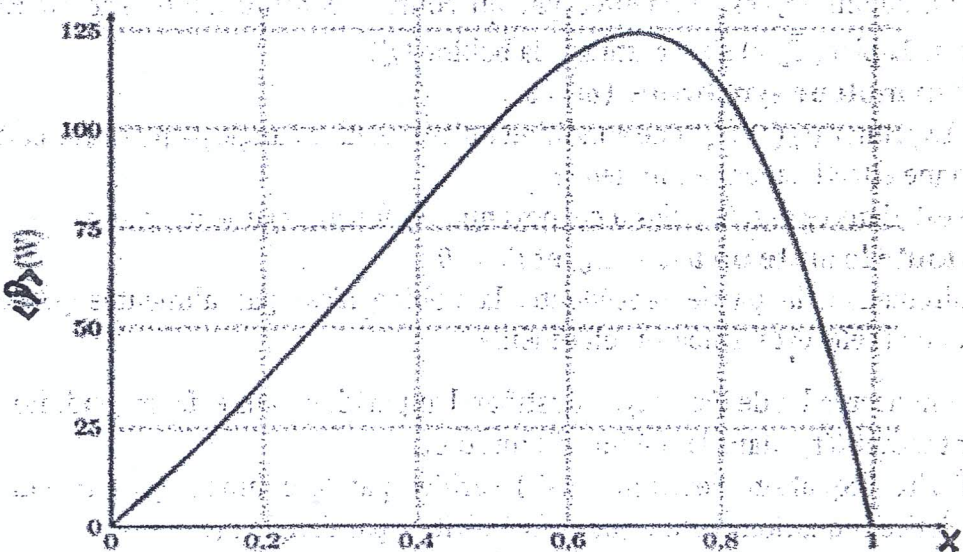


Figure 4

Déterminer, en tours par minute, la vitesse angulaire ω .

Q50- Citer un autre type de moteurs.

**** Fin de l'épreuve ****