

Examen de fin du premier semestre de Systèmes Techniques Automatisés
Partie A : Mécanique des Solides Indéformables

Sections : M.P.2 & P.C.2

Date : 04 Janvier 2024

- aucun document n'est autorisé ;
- le document énoncé comporte 2 pages ;
- les parties A et B sont indépendantes ;
- le document réponses comporte 6 pages ;

L'étude porte sur un système de préhension qui permet de saisir un objet et de le déplacer (Figure 1). Ce système est constitué :

- d'un bâti fixe (0) auquel est lié le repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ supposé galiléen ;
- d'une colonne (1), à laquelle est lié le repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$, en liaison pivot parfaite d'axe $(O, \vec{z}_0)$ avec le bâti (0). On note $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$;
- d'un bras (2), auquel est lié le repère $R_2(A, \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, en liaison pivot parfaite d'axe $(A, \vec{x}_1)$ avec la colonne (1) d'une part et en liaison pivot parfaite d'axe $(B, \vec{x}_1)$ avec le bras (3) d'autre part. On note $\theta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_0, \vec{z}_2)$;
- d'un bras (3), de centre d'inertie G_3 , auquel est lié le repère $R_3(B, \vec{x}_1, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ tel que $\vec{y}_3 = \vec{y}_1$ et $\vec{z}_3 = \vec{z}_0$;
- d'une barre (4), à laquelle est lié le repère $R_4(D, \vec{x}_1, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ tel que $\vec{y}_4 = \vec{y}_2$ et $\vec{z}_4 = \vec{z}_2$, en liaison pivot parfaite d'axe $(D, \vec{x}_1)$ avec la colonne (1) d'une part et en liaison pivot parfaite d'axe $(C, \vec{x}_1)$ avec le bras (3) d'autre part ;
- d'un vérin qui assure la rotation de (2) par rapport à (1). Il est constitué d'une tige (5) et du corps (6) liés par une liaison pivot glissant d'axe $(E, \vec{y}_6)$. Cette tige (5) est aussi en liaison pivot parfaite d'axe $(F, \vec{x}_1)$ avec le bras (2). Le corps (6), auquel est lié le repère $R_6(E, \vec{x}_1, \vec{y}_6, \vec{z}_6)$, est en liaison pivot parfaite d'axe $(E, \vec{x}_1)$ avec la colonne (1). On note $\beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_6) = (\vec{z}_0, \vec{z}_6)$.

Données et hypothèses :

- les paramètres et les données géométrique du système étudié sont présentés par les relations suivantes :

$$\vec{OA} = a\vec{y}_1 + h\vec{z}_0 \quad ; \quad \vec{AE} = -e\vec{z}_0 \quad ; \quad AB = DC = L \quad ; \quad AD = BC = d \quad ; \quad \vec{AF} = \frac{L}{2}\vec{y}_2$$

$$\vec{BG}_3 = -b\vec{z}_0 \quad ; \quad \vec{EF} = \lambda\vec{y}_6$$

où a, b, d, e, h et L sont des caractéristiques dimensionnelles (constantes). α, β, θ et λ sont des paramètres de position du système, dépendants du temps (variables de configuration).

- on note m_2 la masse de (2), G_2 son centre d'inertie ($G_2 \equiv F$) et sa matrice d'inertie au point A est :

$$[I_A(2)] = \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$$

— on note m_3 la masse de (3) et sa matrice d'inertie au point G_3 est :

$$[I_{G_3}(3)] = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}_{(\bar{x}_1, \bar{y}_3, \bar{z}_3)}$$

— la masse du bras (4) est négligeable ;

— l'action de la pesanteur sur le système est supposée négligeable sauf pour le bras (3). Le champ de pesanteur est $\vec{g} = -g\vec{z}_0$;

— l'action de la tige du vérin (5) sur le bras (2) est modélisée par le torseur :

$$\{\tau_{(5 \rightarrow 2)}\}_F = \begin{Bmatrix} F\vec{y}_6 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

— l'action du bras (4) sur le bras (3) est modélisée par le torseur :

$$\{\tau_{(4 \rightarrow 3)}\}_C = \begin{Bmatrix} Y_{43}\vec{y}_4 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \text{avec : } \vec{y}_4 = \vec{y}_2$$

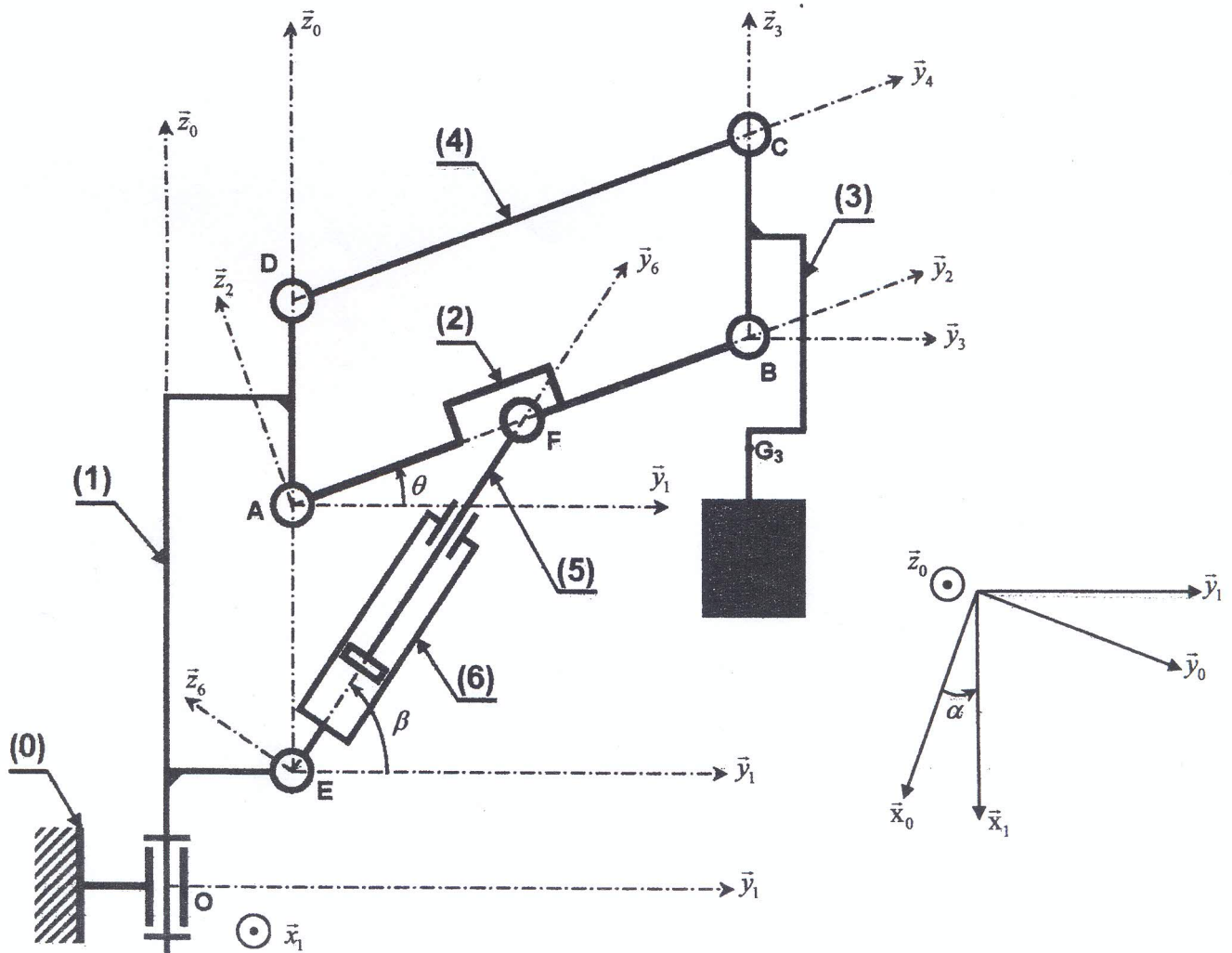


FIGURE 1 – Schéma cinématique minimal du préhenseur

Document réponses (1/2)

Épreuve de : Systèmes Techniques Automatisés – *Partie A : Mécanique des Solides Indéformables*

CIN / N° d'inscription pour les étrangers :

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Nom :

Prénom :

Salle :

Groupe :

A.I. Étude cinématique

A.1) Déterminer le torseur cinématique de (2) dans son mouvement par rapport à (1) au point A, puis au point F.

.....

.....

.....

$$\boxed{\{V_{(2/1)}\}_A = \begin{Bmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{Bmatrix}} \quad ; \quad \boxed{\{V_{(2/1)}\}_F = \begin{Bmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{Bmatrix}}$$

A.2) Déterminer, dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_6, \vec{z}_6)$ et en fonction de $\dot{\lambda}$, le vecteur vitesse du point F de la tige (5) dans son mouvement par rapport au corps (6).

.....

.....

$$\boxed{\vec{V}(F \in 5/6) = \dots\dots\dots}$$

A.3) Déterminer, par cinématique et dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_6, \vec{z}_6)$, le vecteur vitesse du point F du corps (6) dans son mouvement par rapport à la colonne (1).

.....

.....

$$\boxed{\vec{V}(F \in 6/1) = \dots\dots\dots}$$

A.4) En utilisant la fermeture cinématique de la chaîne 1 – 2 – 5 – 6 – 1 au point F, écrire par projection sur la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_6, \vec{z}_6)$ le système d'équations liant $\lambda, \dot{\lambda}, \theta, \dot{\theta}, \beta, \dot{\beta}$ et L.

.....

.....

NE RIEN ÉCRIRE ICI

.....

.....

.....

.....

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right.$$

A.5) Quelle est la nature du mouvement du bras (3) par rapport à la colonne (1) ? Justifier.

Nature du mouvement de (3)/(1) :

Justification :

A.6) Déterminer, en fonction de $\dot{\theta}$, le torseur cinématique du bras (3) dans son mouvement par rapport à la colonne (1) au point B, puis au point G_3 .

.....

.....

.....

$$\{V_{(3/1)}\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad ; \quad \{V_{(3/1)}\}_{G_3} = \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$$

A.7) Déterminer le vecteur accélération du point G_3 du bras (3) dans son mouvement par rapport à (1).

.....

.....

$$\vec{\Gamma}(G_3 \in 3/1) =$$

NE RIEN ÉCRIRE ICI

A.8) Déterminer le vecteur accélération du point G_2 du bras (2) dans son mouvement par rapport à (1).

.....

$$\vec{\Gamma}(G_2 \in 2/1) = \dots\dots\dots$$

A.II. Étude dynamique

Dans cette partie, on s'intéresse à la caractérisation du vérin (5,6). Pour cela, l'étude est menée pour une position donnée de la colonne (1) ($\alpha = \text{constante}$ et le repère R_1 est supposé galiléen). Cela permet de modéliser le système proposé à l'étude par un mécanisme plan en considérant le plan de mouvement $(O, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$.

Il convient donc de retenir la notation représentant le torseur des actions mécaniques transmissibles par la liaison entre un solide (i) et un solide (j) au point Q "centre géométrique de la liaison", exprimé dans la base $\mathcal{B}_2(\vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$:

$$\{\tau_{(i \rightarrow j)}\}_Q = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & L_{ij} \\ Y_{ij} & 0 \\ Z_{ij} & 0 \end{array} \right\}_Q^{\mathcal{B}_2}$$

A.9) Déterminer, au point A et dans la base $\mathcal{B}_2$, le torseur dynamique du bras (2) dans son mouvement par rapport à la colonne (1).

.....

$$\{\mathcal{D}_{(2/1)}\}_A = \left\{ \begin{array}{cc} \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array} \right\}_A^{\mathcal{B}_2}$$

NE RIEN ÉCRIRE ICI

A.10) Écrire dans la base $\mathcal{B}_2$ et en fonction de $(\beta - \theta)$, le torseur représentant l'action mécanique de la tige (5) sur le bras (2) au point F.

$$\{\tau_{(5 \rightarrow 2)}\}_F = \left\{ \begin{array}{cc} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{array} \right\}_{\substack{\mathcal{B}_2 \\ F}}$$

A.11) Déterminer, au point A et dans la base $\mathcal{B}_2$, le torseur des actions mécaniques extérieures exercées sur le bras (2).

$$\{\tau_{(2 \rightarrow 2)}\}_A = \left\{ \begin{array}{cc} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{array} \right\}_{\substack{\mathcal{B}_2 \\ A}}$$

Document réponses (2/2)

Épreuve de : Systèmes Techniques Automatisés – *Partie A : Mécanique des Solides Indéformables*

CIN / N° d'inscription pour les étrangers :

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Nom :

Prénom :

Salle :

Groupe :

✂

A.12) Écrire le système d'équations qui découle de l'application du Principe Fondamental de la Dynamique au bras (2) dans son mouvement par rapport à la colonne (1).

.....

{	
---	-------------------------

A.13) Déterminer, au point B et dans la base $\mathcal{B}_2$, le torseur dynamique du bras (3) dans son mouvement par rapport à la colonne (1).

.....

$\{\mathcal{D}_{(3/1)}\}_B =$	<table style="width: 100%;"> <tr> <td style="width: 50%;">.....</td> <td style="width: 50%;">.....</td> </tr> <tr> <td>.....</td> <td>.....</td> </tr> <tr> <td>.....</td> <td>.....</td> </tr> </table>							$\left. \vphantom{\begin{matrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{matrix}} \right\} \begin{matrix} \mathcal{B}_2 \\ \\ B \end{matrix}$
.....								
.....								
.....								

A.14) Déterminer, au point B et dans la base $\mathcal{B}_2$, le torseur des actions mécaniques extérieures exercées sur le bras (3).

.....

NE RIEN ÉCRIRE ICI

$$\left\{ \tau_{(\bar{3} \rightarrow 3)} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \end{array} \right\}_{\substack{B_2 \\ B}}$$

A.15) Écrire le système d'équations qui découle de l'application du Principe Fondamental de la Dynamique au bras (3) dans son mouvement par rapport à la colonne (1).

$$\left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \end{array} \right\}$$

A.16) En utilisant les résultats des questions A.12) et A.15), établir l'expression de la force F appliquée par la tige du vérin (5) sur le bras (2).

$$F = \dots\dots\dots$$

Examen de fin du premier semestre de Systèmes Techniques Automatisés

Partie Automatique

Dans ce sujet, on s'intéresse à l'asservissement en vitesse du mouvement de translation d'une base motorisée (Figure n°1) d'une plateforme mobile d'imagerie robotisée. Cette base est constituée :

- d'une structure support, ou châssis, composée du bras vertical et du cadre Y ;
- de deux sous-ensembles roue motrice et motorisation associée (un motoréducteur d'orientation et un motoréducteur de propulsion pour chaque roue) ;
- de deux doubles roues « folles » non motorisées.

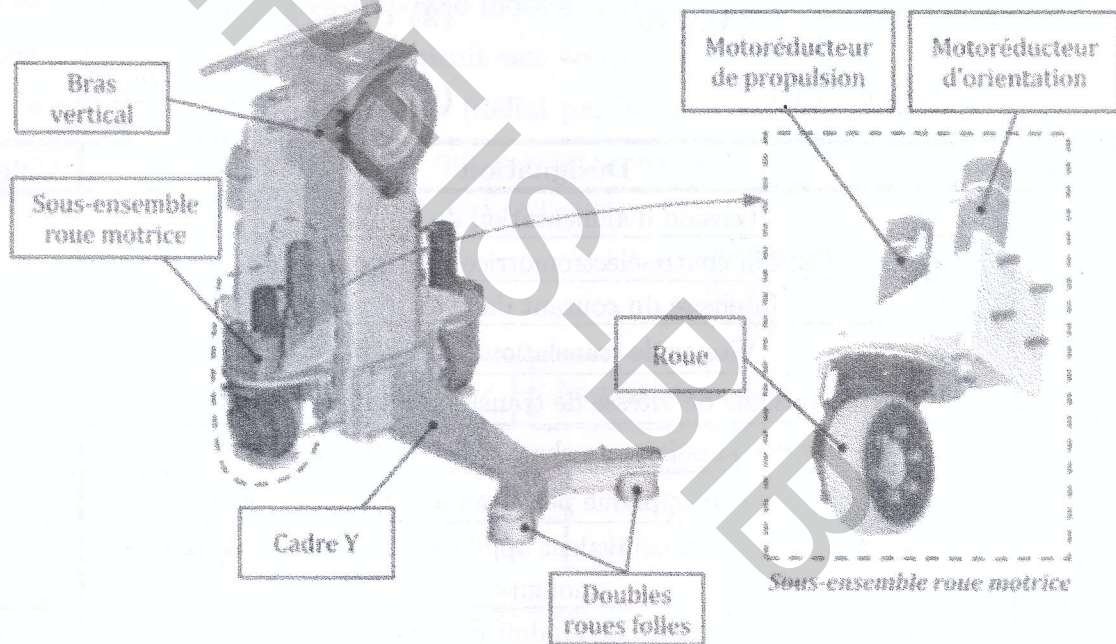


Figure n°1. Éléments de la base motorisée (BM)

Objectif : Vérifier les exigences, d'asservissement en vitesse du mouvement de translation de la base motorisée, suivantes :

Performances	Valeurs souhaitées
Dépassement	Sans dépassement
Précision	Erreur statique nulle pour une entrée en échelon
Rapidité	Temps de réponse à $\pm 5\%$ inférieur à 2.5 s

Étude préliminaire : moteurs de propulsion

Hypothèses et modélisations :

- la base motorisée (BM) se déplace en ligne droite (consigne de vitesse $v_c(t)$, les roues étant dans la même direction que l'axe de symétrie de la BM) ;
- les roues motrices roulent sans glisser sur le sol ;
- la charge extérieure est supposée équi-répartie sur chacun des deux moteurs. Ainsi, pour une vitesse $v(t)$ de la plateforme, les deux moteurs de propulsion tournent à la même vitesse angulaire $\omega_m(t)$, sont alimentés par une même tension de commande $u(t)$ et fournissent un même couple moteur $c_m(t)$;
- les perturbations sont réparties sur chacun des axes des deux moteurs et sont modélisées par un même couple de perturbation équivalent appliqué sur chacun des axes moteurs $c_r(t)$;
- les caractéristiques inertielles de la plateforme sont représentées au niveau de chaque axe moteur par un moment d'inertie équivalent J_{eq} ;
- le comportement individuel d'un des deux moteurs peut être approché par celui d'un moteur à courant continu avec les équations électromécaniques suivantes :

$$(1) \quad u(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + e(t)$$

$$(2) \quad c_m(t) = k_c i(t)$$

$$(3) \quad e(t) = k_e \omega_m(t)$$

$$(4) \quad c_m(t) - c_r(t) = J_{eq} \frac{d\omega_m(t)}{dt}$$

Symbole	Désignation	Valeurs, unités
$u(t)$	Tension d'alimentation du moteur	[V]
$e(t)$	Tension contre-électromotrice dans un moteur	[V]
$i(t)$	Intensité du courant dans un moteur	[A]
$v(t)$	Vitesse de translation du système	[m/s]
$v_c(t)$	Consigne de vitesse de translation du système	[m/s]
$\omega_m(t)$	Vitesse angulaire de chacun des deux moteurs	[rad/s]
$c_m(t)$	Couple moteur appliqué par chacun des deux moteurs	[N.m]
$c_r(t)$	Couple de perturbation équivalent appliqué à chacun des deux axes moteurs	[N.m]
R	Résistance de l'induit d'un moteur	0,07 Ω
L	Inductance de l'induit d'un moteur	0,15mH
k_e	Constante de vitesse d'un moteur	0,113V/(rad/s)
k_c	Constante de couple d'un moteur	0,113(N.m)/A
J_{eq}	Inertie équivalente de la moitié du système ramenée sur l'axe d'un moteur	$5,3 \times 10^{-3}$ kg.m ²

On note $U(p)$, $E(p)$, $I(p)$, $V(p)$, $V_c(p)$, $\Omega_m(p)$, $C_m(p)$ et $C_r(p)$ les transformées de Laplace respectives de $u(t)$, $e(t)$, $i(t)$, $v(t)$, $v_c(t)$, $\omega_m(t)$, $c_m(t)$ et $c_r(t)$.

1. En considérant des conditions initiales nulles, déterminer les transformées de Laplace des équations (1) à (4) du moteur. Compléter le schéma-bloc (Figure n°3) du document réponse (à rendre) par les transmittances manquantes.

2. Déterminer l'expression littérale de la fonction de transfert du moteur en poursuite $H_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)}$ (sans perturbation).

Ecrire $H_1(p)$ sous sa forme canonique en fonction de R , L , k_e , k_c et J_{eq} .

3. Déterminer l'expression de la fonction de transfert en régulation $H_2(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_r(p)}$ (consigne nulle)

en fonction de R , L , k_e , k_c et J_{eq} .

4. Déterminer l'expression de la sortie $\Omega_m(p)$ en fonction des entrées $U(p)$ et $C_r(p)$.

Le système est étudié en l'absence de perturbation, $c_r(t) = 0$

5. Réaliser l'application numérique de la fonction de transfert du moteur et mettre le résultat sous la forme $H_1(p) = \frac{K_m}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$. En prenant $\tau_1 > \tau_2$, donner les valeurs de τ_1 , τ_2 et K_m .

Étude de l'asservissement en vitesse de la base motorisée

Pour une consigne de vitesse $v_c(t)$ [m/s], les microcontrôleurs de pilotage génèrent une tension de consigne de rotation à appliquer à chaque moteur $u_c(t)$ [V]. Un traitement numérique de la vitesse relevée sur l'axe de chaque moteur fournit une tension mesurée $u_m(t)$ [V], image de la vitesse de rotation du moteur $\omega_m(t)$. Un correcteur (défini par la suite) adapte le signal écart entre la tension de consigne et la tension mesurée, ce qui permet après correction et amplification, de définir la tension d'alimentation $u(t)$ à appliquer aux moteurs.

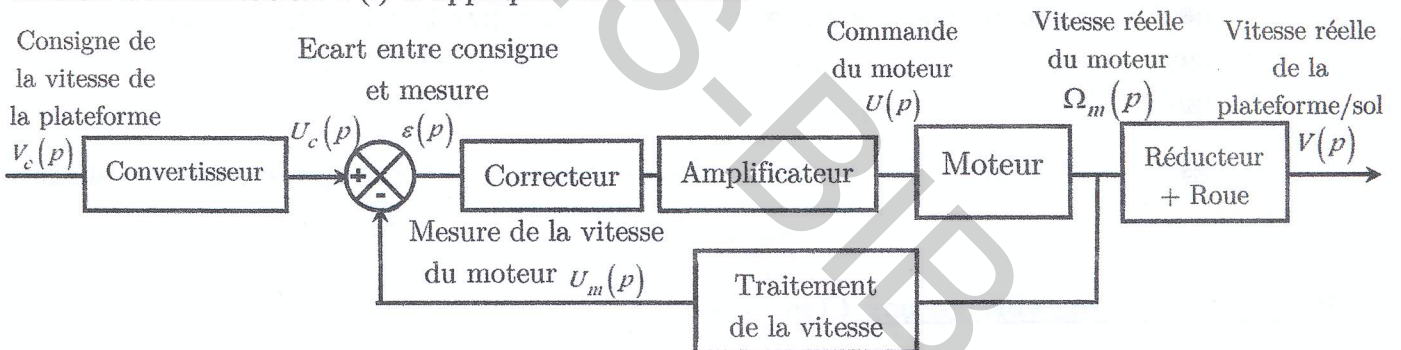


Figure n°2. Schéma de principe de l'asservissement en vitesse du mouvement de translation de la BM

Blocs	Fonctions de transfert
Convertisseur	K_{conv} (à déterminer)
Correcteur	$C(p)$ (réglé par la suite)
Amplificateur	$K_A = 7,9$ (sans unité)
Traitement numérique de la vitesse	$K_{vit} = 1,4 \times 10^{-3} V / (rad / s)$
Réducteur+roue	K_R (à déterminer)

Indépendamment des résultats trouvés précédemment, la fonction de transfert du moteur sera prise égale à :

$$H_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{K_m}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)} \text{ avec } K_m = 8,85, \tau_1 = 0.027s \text{ et } \tau_2 = 0.0023s$$

Le moteur est suivi d'un réducteur à deux étages : le premier avec un rapport de réduction $k_1 = 1/4$ et le second avec un rapport de réduction $k_2 = 1/28,9$. Le rayon des roues motrices est de $r = 0.115m$. Si on suppose qu'il y a roulement sans glissement de la roue sur le sol, on peut écrire $v(t) = r \cdot \omega_{roue}(t) = r \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot \omega_m(t)$.

6. Déterminer la valeur numérique du gain K_R (ensemble réducteur et roue).
7. Compléter le schéma-bloc sur le document réponse (Figure n°4), en y faisant figurer les fonctions de transfert sous forme littérale dans le domaine de Laplace avec des conditions initiales nulles, ainsi que les signes du sommateur.
8. Déterminer l'expression de l'erreur $\varepsilon(p)$ en fonction de K_{conv} , K_{vit} , K_R , $V(p)$ et $V_c(p)$. En sachant que l'écart $\varepsilon(t)$ doit être nul lorsque la vitesse réelle de la BM $v(t)$ est égale à la vitesse de consigne $v_c(t)$, déduire K_{conv} (convertisseur) en fonction de K_{vit} et K_R .

Étude du système non corrigé : $C(p) = 1$ et en supposant que $K_{conv} = \frac{K_{vit}}{K_R}$

9. Déterminer, en fonction de K_m , K_A , K_{vit} , τ_1 et τ_2 , l'expression de la fonction de transfert de la boucle de vitesse, notée $G(p) = \frac{V(p)}{V_c(p)}$, sous la forme canonique d'un système du second ordre. Donner les expressions littérales et numériques du gain statique K , de la pulsation propre non amortie ω_n et du coefficient d'amortissement ξ .
10. Tracer l'allure de la réponse indicielle de constante v_0 en justifiant le régime.
11. À l'aide de l'abaque du document réponse Figure n°5, déterminer le temps de réponse à $\pm 5\%$ de la boucle de vitesse (faire apparaître les tracés sur le document réponse).
12. Déterminer l'erreur en régime permanent $\varepsilon(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$ de la boucle de vitesse pour une entrée en échelon d'amplitude v_0 . La commande du système sans correction permet-elle de satisfaire les exigences fixées ?

Étude du système corrigé par $C(p) = K_i \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$

13. Déterminer, en fonction de K_i , K_m , K_A , K_{vit} et T_i , l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte sous la forme suivante : $H_{BO}(p) = \frac{U_m(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{K_{BO}(1 + T_i p)}{p(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$.
14. Déduire la classe α et l'expression littérale de K_{BO} .
15. On choisit T_i de façon à compenser (simplifier) le "mode le plus lent". Donner la valeur de T_i ainsi que la nouvelle expression de $H_{BO}(p)$.
16. Déterminer l'erreur en régime permanent $\varepsilon(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$ de la boucle de vitesse pour une entrée en échelon d'amplitude v_0 . Ce correcteur permet-il de répondre à l'exigence de précision ?
17. La Figure n°6 du document réponse présente la réponse à une consigne en échelon d'amplitude $0,3m/s$ obtenue pour $K_i = 0.2$. Déduire graphiquement le temps de réponse à $\pm 5\%$. Conclure vis-à-vis le respect des exigences.

Nom
 Prénom
 Groupe



Document réponse d'Automatique

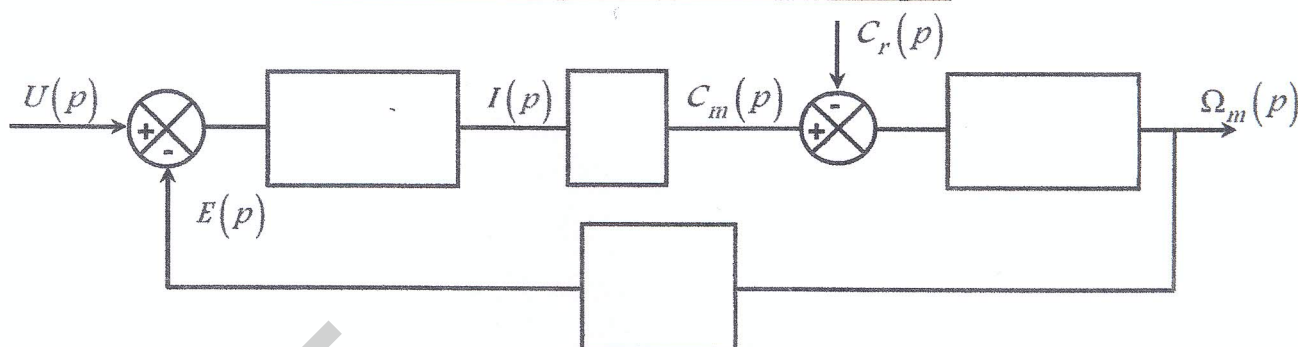


Figure n°3. Schéma-bloc d'un moteur de propulsion

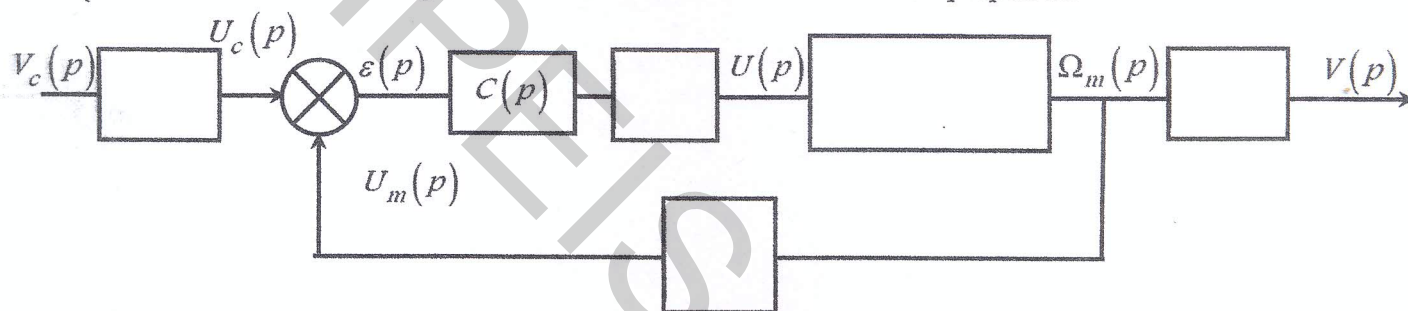


Figure n°4. Schéma-bloc de l'asservissement en vitesse du mouvement de translation de la BM

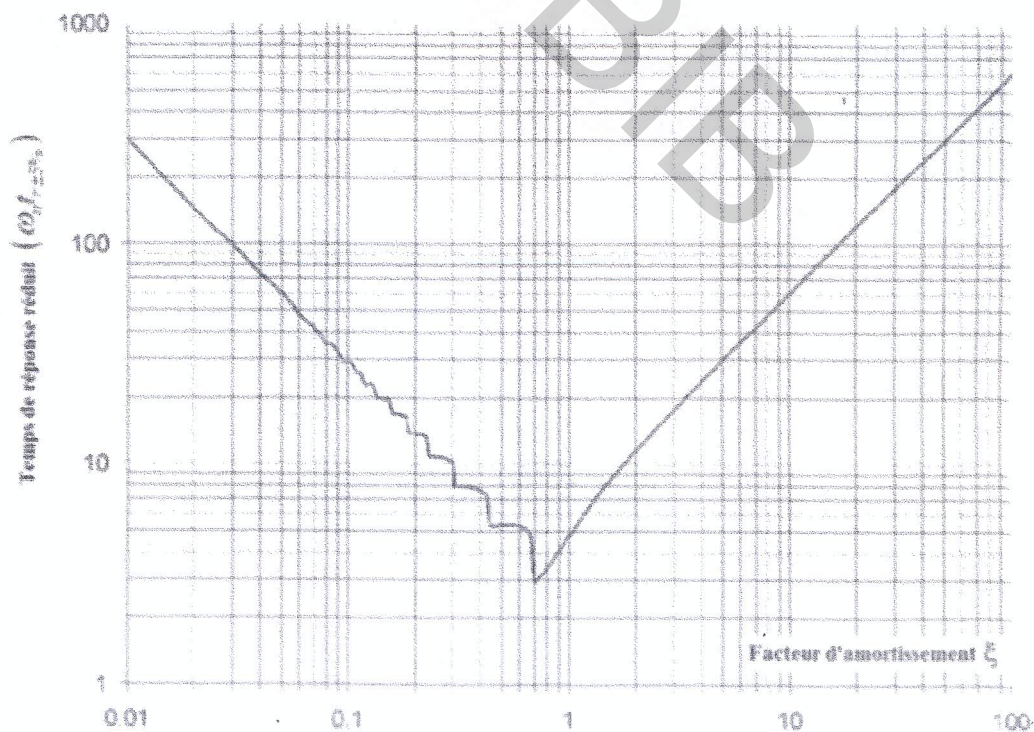


Figure n°5. Abaque du temps de réponse réduit $(\omega_n t_{r \pm 5\%})$ d'un système du second ordre

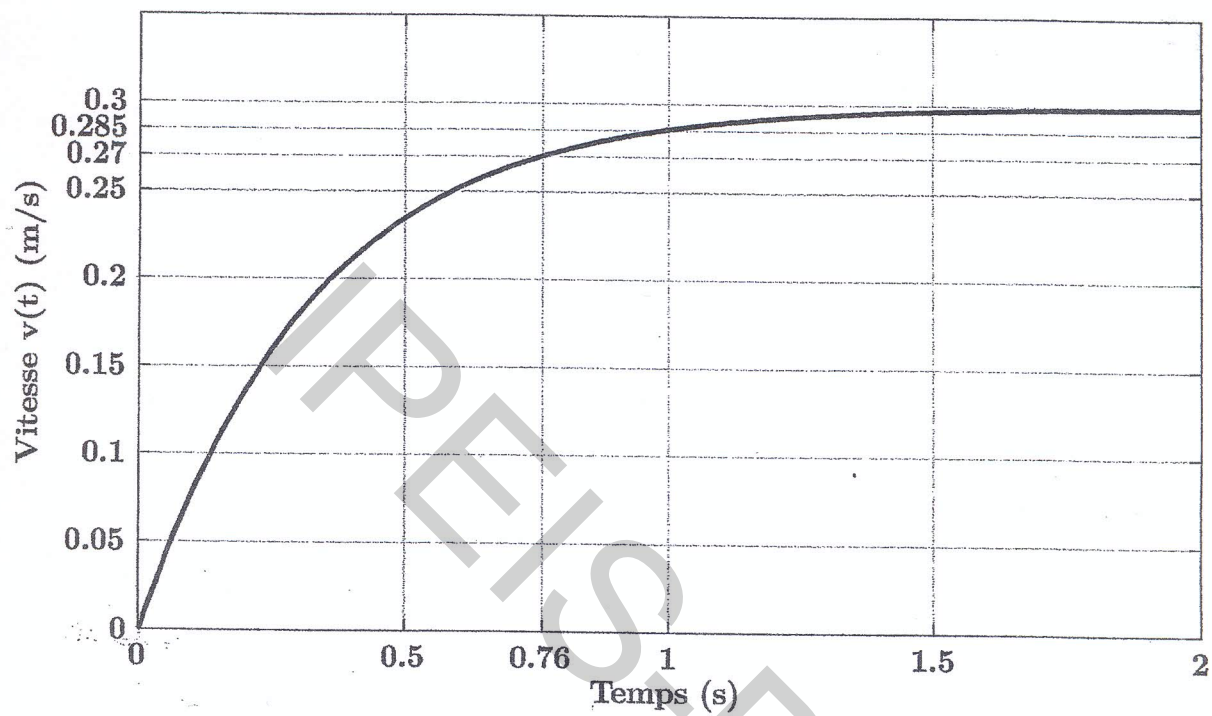


Figure n°6. Réponse indicielle à une consigne d'amplitude 0,3m/s pour $K_t = 0.2$