UNIVERSITÉ DE SFAX Année universitaire: 2023/2024

****

Institut Préparatoire aux Études

d'Ingénieurs de Sfax

Epreuve d'algèbre – Semestre N°2

Sections : PC2 – PT2

Durée : 2h Date: 06 Mai 2024 Nombre de pages : 3

IPEIS-BIB

Exercice/ 6 Points

Soit φ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la fonction f par:

$$f(x,y) = x^2 \int_0^y \varphi(t)dt + \int_0^y t^2 \varphi(t)dt, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

1) Exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ à l'aide de φ. Déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

2) Si φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, déterminer à l'aide de la fonction φ, les fonctions suivantes:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y), \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

Déduire dans ce cas que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

3) On suppose que φ ne s'annule jamais. La fonction f admet-elle des extrémums ?

4) On suppose dans cette question que: $\varphi(t) = t$.

   (a) Déterminer les extrémums de f.

   (b) Soit la surface suivante: $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = f(x,y)\}$

   Déterminer l'équation du plan tangent $\prod$ à la surface Σ au point: $(1,2,6)$.

5) On suppose dans cette question que φ est de classe C^1.

   (a) Montrer que la fonction f vérifie l'EDP suivante: $(x^2+y^2).(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}) = 2x.(\frac{\partial f}{\partial y})$.

   (b) Inversement, si f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ telle que: $f(x,0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ et vérifiant l'EDP précédente, montrer l'existence d'une function φ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle:

$$f(x,y) = x^2 \int_0^y \varphi(t)dt + \int_0^y t^2 \varphi(t)dt, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Problème/ 14 Points

Notations. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on désigne par:

- $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) / {}^tAA = I_n\}$ et $SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) / \det(A) = 1\}$.
- Pour un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$, la notation $\det(f)$ désigne le déterminant de f.
- $O(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des isométries de $\mathbb{R}^n$ et $SO(\mathbb{R}^n) = \{f \in O(\mathbb{R}^n) / \det(f) = 1\}$.
- $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme euclidienne associée au produit scalaire usuel $<./.>$.

Partie I.

1) Soit $f \in O(\mathbb{R}^n)$.

(a) Montrer que, pour toute valeur propre réelle λ de f, on a: $\lambda \in \{-1,1\}$.

(b) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si F est stable par f, alors l'orthogonal $F^{\perp}$ de F est aussi stable par f.

2) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose: $R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

(a) Montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $R_\theta \in SO_3(\mathbb{R})$.

(b) Soit $(\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2$. Montrer que: $R_\theta \times R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$. En déduire que pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a: $(R_\theta)^p = R_{p\theta}$.

(c) Pour quelles valeurs de θ, la matrice R_θ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? sur $\mathbb{R}$?

Partie II.

Pour tout vecteur unitaire a de $\mathbb{R}^3$, on désigne par σ_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par:

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \sigma_a(x) = 2 < x / a > a - x$$

1) Déterminer l'expression des projections orthogonales d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}.a$ et sur sur $H = (\mathbb{R}.a)^{\perp}$.

2) Soient $a = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), u = (1,-1,0), v = (1,0,-1)$. Il est évident que:

$$H = (\mathbb{R}.a)^{\perp} = vect\{u,v\}$$

Soit: $b = (2,1,1)$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on définit $f(x,y) = \|b - x.u - y.v\|^2$.

(a) Montrer que: $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 2y + 6$

(b) Montrer que la fonction f admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$ que l'on déterminera de deux méthodes.

3) (a) Montrer que σ_a est une symétrie vectorielle différente de $Id_{\mathbb{R}^3}$.

(b) Déterminer $\ker(\sigma_a - Id_{\mathbb{R}^3})$ et $\ker(\sigma_a + Id_{\mathbb{R}^3})$.

(c) En déduire que σ_a est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathbb{R}.a$.

IPEIS-BIB

(d) Rappelons que $\mathbb{R}^3 = Vect(a) \oplus (Vect(a))^{\perp}$. Déterminer la matrice de σ_a dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, adaptée a cette décomposition. En déduire que $\sigma_a \in SO(\mathbb{R}^3)$.

4) Soit $r \in SO(\mathbb{R}^3)$ et a un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$. Montrer que: $r \circ \sigma_a \circ r^{-1} = \sigma_{r(a)}$.

5) Soit (u,v,w) une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Montrer que: $\sigma_u \circ \sigma_v = \sigma_w$.

Partie III.

Soit $f \in SO(\mathbb{R}^3)$ tel que $f \neq Id_{\mathbb{R}^3}$. On note $P_f(X) = \det(X.Id_{\mathbb{R}^3} - f)$.

1) Montrer que P_f admet une racine réelle λ_0.
2) Soit u_0 un vecteur propre unitaire associé a la valeur propre λ_0.
   (a) Montrer que $(Vect(u_0))^{\perp}$ est stable par f.
   (b) Montrer que $\det(f) = \lambda_0.\det(f_{/(Vect(u_0))^{\perp}})$.
   (c) Montrer que 1 est une valeur propre de f.
   (d) Montrer qu'il existe une base orthonormée $\beta = (u,v,w)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice:
   $$Mat(f,\beta) = R_\theta, \theta \in \mathbb{R}$$
   On dit dans ce cas que f est la rotation vectorielle d'axe: $\vec{\Delta} = Vect(u)$ et d'angle θ, on écrit: $f = R(\vec{\Delta},\theta)$.
3) Avec les notations de 2) d), on suppose que $\theta \in [\frac{\pi}{2},\pi]$ et on considère l'application:
   $$\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, x \mapsto < f(x) / x >$$
   (a) Montrer que ψ est continue sur $\mathbb{R}^3$, et calculer $\psi(u)$ et $\psi(v)$.
   (b) Soit S la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. On admet que $\psi(S)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que $\psi(S)$ contient 0.
   (c) En déduire qu'il existe un vecteur unitaire a de $\mathbb{R}^3$ tel que: $f(a) \perp a$.
   (d) On pose: $b = f(a)$. Soit $c \in \mathbb{R}^3$ tel que (a,b,c) soit une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Montrer que: $\sigma_a \circ f \circ (\sigma_a)^{-1} \circ f^{-1} = \sigma_c$.
4) Soit $f \in O(\mathbb{R}^3) - SO(\mathbb{R}^3)$.
   (a) Montrer qu'il existe une base orthonormée $\beta = (u,v,w)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice:
   $$Mat(f,\beta) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R}$$
Si $\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, l'endomorphisme f est la symétrie orthogonale par rapport au plan vectoriel $H := (Vect(u))^{\perp}$, on écrit: $f = S_H$. On dit dans ce cas que f est une reflexion.
   (b) Avec les notations de (a), posons $\vec{\Delta} = Vect(u)$. Vérifier que:
   $$f = R(\vec{\Delta},\theta) \circ S_{\vec{\Delta}^{\perp}} = S_{\vec{\Delta}^{\perp}} \circ R(\vec{\Delta},\theta)$$

IPEIS-BIB