

**Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieur de Sfax**  
Semestre 2

**Devoir de contrôle de Mécanique des Solides Indéformables**  
**MP2 & PC2 & T2**

Durée : 1h

(Aucun document n'est autorisé)

Date : 15 Mars 2024

**Mise en situation**

L'usinage est une étape de fabrication d'une pièce par enlèvement de matière. Le moyen de production associé à ces opérations d'usinage est une machine outil ou un centre d'usinage (Figure 1).

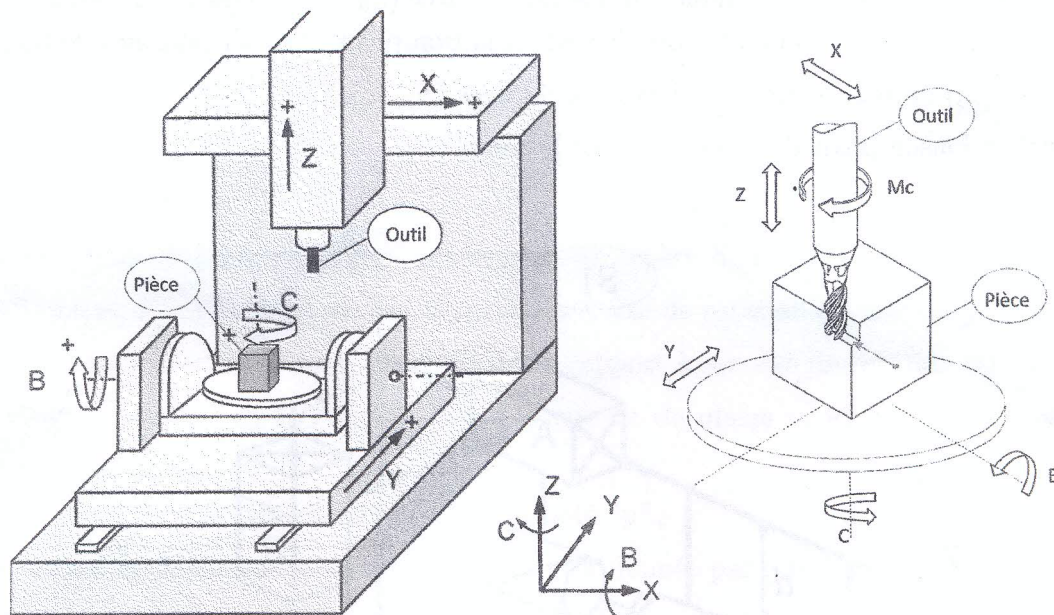


FIGURE 1 – Vue globale du centre d'usinage avec repérage des « axes »

Un « axe » sur une machine outil est un ensemble qui gère un des mouvements d'avance de l'outil par rapport à la pièce. Un « axe » est composé d'une partie commande et d'une partie opérative. Cette partie opérative est généralement constituée :

- d'un modulateur d'énergie (c'est le préactionneur) ;
- d'un moteur (c'est l'actionneur) ;
- d'un mobile (c'est l'élément dont on veut commander le déplacement) ;
- d'un système de transformation de mouvement entre le moteur et le mobile ;
- de capteurs (généralement un capteur de vitesse et un capteur de position).

Le centre d'usinage « 5 axes » étudié (Figure 1), permet l'obtention de formes complexes. Il est constitué d'un bâti supportant :

- 2 « axes » pour la mise en mouvement de l'outil par rapport au bâti. Ces 2 translations sont notées « X » et « Z » ;

- 3 « axes » pour la mise en mouvement de la pièce par rapport au bâti. Une troisième translation est notée « Y » et les 2 rotations sont notées « B » et « C » ;
- un dispositif de mise en rotation de l'outil autour de son axe géométrique par rapport au bâti. Cette rotation générant le mouvement de coupe ne sera pas étudiée.

Le sujet comporte deux parties :

- Partie I. Étude cinématique ;
- Partie II. Étude énergétique.

### Schéma cinématique et paramétrage

La schéma cinématique (Figure 2) représente le mécanisme qui assure le déplacement de l'outil. Le système est composé des éléments suivants :

- un bâti ( $S_0$ ) auquel est lié le repère supposé galiléen  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  ;
- un coulisseau ( $S_1$ ) en liaison glissière d'axe  $(A, \vec{x}_0)$  avec ( $S_0$ ) et en liaison hélicoïdale d'axe  $(E, \vec{x}_0)$  avec l'ensemble (vis + rotor). Ce dernier est en liaison pivot d'axe  $(F, \vec{x}_0)$  avec le bâti ( $S_0$ ) ;
- un solide ( $S_2$ ) en liaison glissière d'axe  $(B, \vec{z}_0)$  avec ( $S_1$ ) ;
- un outil en liaison pivot d'axe  $(C, \vec{z}_0)$  avec le solide ( $S_2$ ).

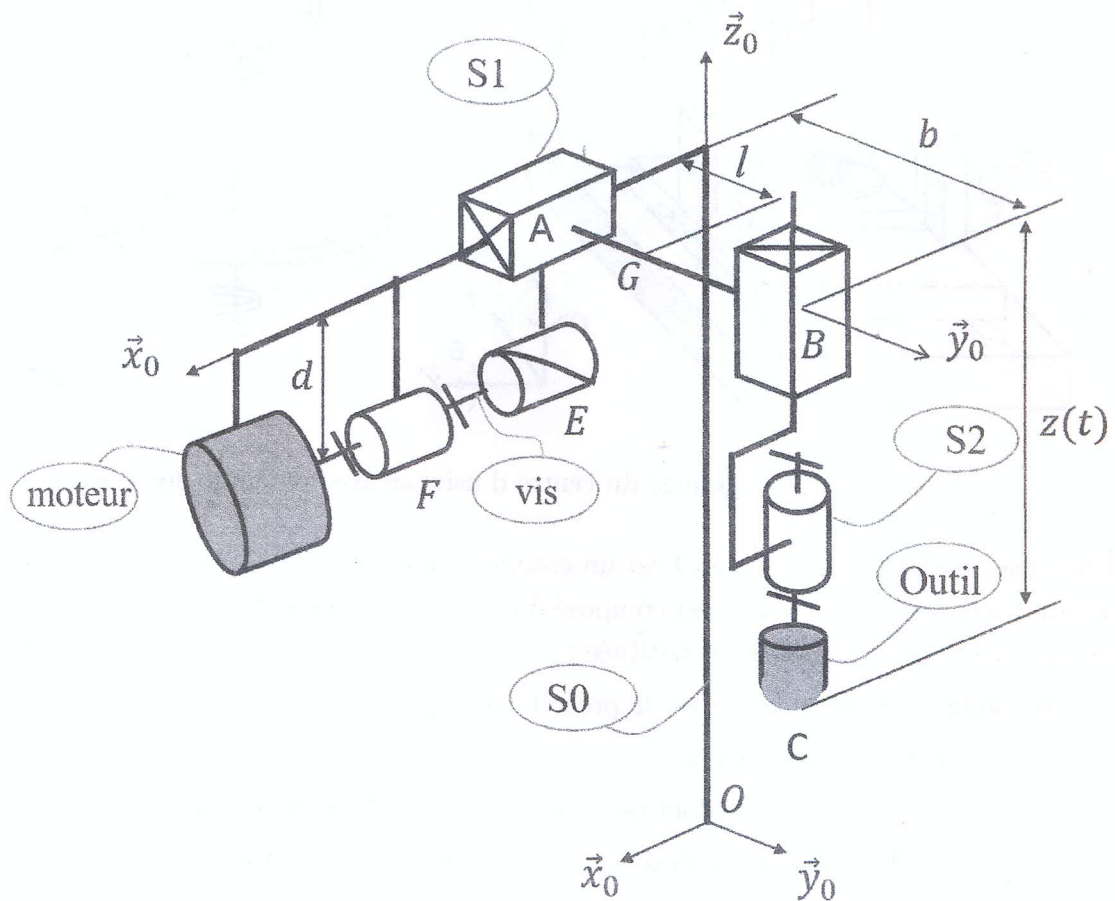


FIGURE 2 – Schéma cinématique : déplacement de l'outil par rapport au bâti

On donne :

$$\overrightarrow{OA} = x(t)\vec{x}_0 + h\vec{z}_0 \quad ; \quad \overrightarrow{AB} = b\vec{y}_0 \quad ; \quad \overrightarrow{CB} = z(t)\vec{z}_0 \quad ; \quad \overrightarrow{EA} = d\vec{z}_0$$

## Partie I : Étude cinématique

L'objectif de cette partie est d'exprimer la vitesse d'un point de l'extrémité de l'outil par rapport à la pièce en fonction du paramétrage proposé.

|                        | Variable | course | vitesse maximale |
|------------------------|----------|--------|------------------|
| Axe "X" (longitudinal) | $x(t)$   | 800 mm | 40 m/min         |
| Axe "Y" (transversal)  | $y(t)$   | 600 mm | 40 m/min         |
| Axe "Z" (vertical)     | $z(t)$   | 500 mm | 40 m/min         |

- I.1) Exprimer  $\overrightarrow{OC}$  dans la base du repère  $R_0$ .
- I.2) Établir l'expression de la vitesse du point  $C$ , lié à l'outil, dans son mouvement par rapport à  $R_0$ .
- I.3) Calculer la valeur maximale de la norme du vecteur vitesse du point  $C$ , lié à l'outil, dans son mouvement par rapport à  $R_0$ .

## Partie II : Étude énergétique

L'étude porte sur une phase d'usinage, en déplacement suivant l'axe « X » uniquement ( $\dot{z} = 0$ ).

### Données et Hypothèses :

- la vitesse de rotation du moteur par rapport au repère  $R_0$  est notée  $\omega_m(t)$  ;
- le moment d'inertie de la vis par rapport à son axe de rotation est noté  $J_{vis}$  ;
- le moment d'inertie du rotor du moteur par rapport à son axe de rotation est noté  $J_m$  ;
- l'ensemble coulisseau ( $S$ ) = ( $S_1 + S_2$  + outil) est de masse  $m$  et de centre d'inertie  $G$  tel que  $\overrightarrow{AG} = l\vec{y}_0$  ;
- le pas de la liaison hélicoïdale à droite est noté "p" ;
- la vitesse de déplacement du coulisseau ( $S$ ) est donnée par :  $\dot{x}(t) = \frac{p}{2\pi}\omega_m(t)$  ;
- l'action de la pesanteur sur l'ensemble (rotor + vis) est négligée ;
- l'accélération de la pesanteur est donnée par  $\vec{g} = -g\vec{z}_0$  ;
- pendant l'usinage d'une surface quelconque, on suppose que le torseur représentant l'action mécanique exercée par la pièce sur l'outil au point  $C$  peut s'exprimer par :

$$\{\tau_{(pi\grave{e}ce \rightarrow outil)}\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_C & 0 \\ Y_C & 0 \\ Z_C & 0 \end{array} \right\}_C^{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$$

- l'action du stator du moteur sur le rotor est donnée par :

$$\{\tau_{(stator \rightarrow rotor)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m \vec{x}_0 \end{array} \right\}$$

- toutes les liaisons sont supposées parfaites ;
- l'étude portera sur l'ensemble matériel  $\Sigma = \{vis + rotor + S\}$ .

- II.1) Déterminer l'énergie cinétique du système matériel  $\Sigma$  dans son mouvement par rapport à  $R_0$ .
- II.2) Dédire le moment d'inertie équivalent " $I_{eq}$ ", rapporté à l'arbre moteur, en fonction de  $m$ ,  $J_{vis}$ ,  $J_m$  et  $p$ .
- II.3) Déterminer la puissance développée par les actions mécaniques extérieures à l'ensemble  $\Sigma$  dans son mouvement par rapport à  $R_0$ .
- II.4) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique sur l'ensemble matériel  $\Sigma$  dans son mouvement par rapport à  $R_0$ , déterminer l'expression du couple moteur  $C_m$  en fonction de  $I_{eq}$ ,  $p$ ,  $X_C$  et  $\frac{d\omega_m(t)}{dt}$ .
- II.5) On considère un instant  $t$ , pour lequel la composante du torseur des actions mécaniques de la pièce sur l'outil est  $X_C = -100$  N.  
En phase d'accélération maximale sur l'axe « X »,  $\ddot{x} = 10 \text{ m.s}^{-2}$ , calculer le couple  $C_m$  que le moteur d'axe « X » doit développer.

Données :  $J_{vis} = 10^{-2} \text{ kg.m}^2$  ;  $m = 430 \text{ kg}$  ;  $p = 0,03 \text{ m/tr}$  ;  $J_m = 5.10^{-3} \text{ kg.m}^2$