

Examen d'Algèbre - Semestre N°1
Sections : P.C.2 et P.T.2

Durée : 2h

Date : 20 Décembre 2024

Nombre de pages : 3

☞ L'usage de calculatrices est interdit.

☞ Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement,
à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation.

Exercice /(5 pts)

On note par $B_c = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et on considère $v_1 = (1, 2)$ et $v_2 = (1, 3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

1. (a) Montrer que : $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}v_1 \oplus \mathbb{R}v_2$.
- (b) Soit s la symétrie par rapport à la droite vectorielle $\mathbb{R}v_1$ parallèlement à la droite vectorielle $\mathbb{R}v_2$, c'est à dire :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, s(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha v_1 - \beta v_2.$$

Ecrire N la matrice de s relativement à la base B_c .

- (c) Trouver une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $N = PDP^{-1}$, avec $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$.
2. On note $Sp(S)$ l'ensemble des valeurs propres d'une matrice $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - (a) Soit $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
Montrer que $Sp(S) = \{-1, 1\} \Leftrightarrow d = -a$ et $a^2 + bc = 1$.
 - (b) Montrer que $Sp(S) = \{-1, 1\} \Leftrightarrow S$ est la matrice d'une symétrie.

Problème /(15 pts)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, On considère $\mathbb{C}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n muni de sa base canonique $B_n = (1, X, X^2, \dots, X^n)$.

On se donne un couple $(A, B) \in \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}[X]$, telque $\deg(B) = n + 1$.

Soit φ_n l'application définie sur $\mathbb{C}_n[X]$ qui à un polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ associe le reste de la division euclidienne de AP par B .

1. Justifier que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on $\varphi_n(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.
2. Montrer que φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

Partie 1/ Etude des exemples

Dans cette partie, on pose $n = 2$.

I) Exemple 1 :

on suppose que $A = X^2 + 2X$ et $B = X^3 + X^2 - X - 1$.

1. Montrer que M , la matrice de φ_2 dans B_2 est de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

2. Montrer que φ_2 est diagonalisable sur $\mathbb{C}_2[X]$.

II) Exemple 2 :

on suppose que $A = \alpha + \beta X + \gamma X^2$, avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ et $B = X^3$.

1. Montrer que T , la matrice de φ_2 dans B_2 est de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

2. Montrer que φ_2 est diagonalisable sur $\mathbb{C}_2[X]$ si et seulement si le polynôme A est constant.

Partie 2/ Etude du cas où B est scindé à racines simples

Dans cette partie, on pose $n \in \mathbb{N}^*$ et B un polynôme scindé à racines simples et on note $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ ses racines.

On définit les polynômes de Lagrange $L_0, L_1, \dots, L_n \in \mathbb{C}_n[X]$ associés aux points $x_0, x_1, \dots, x_n$ par :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_k(X) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{X - x_i}{x_k - x_i}.$$

En particulier, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\forall (k, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, L_k(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } k = j \\ 0, & \text{si } k \neq j. \end{cases}$$

I) Décomposition avec les polynômes de Lagrange.

1. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$.

Montrer que $x_0, x_1, \dots, x_n$ sont des racines du polynôme $D = P - \sum_{i=0}^n P(x_i) L_i$.

2. Déduire que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $P = \sum_{i=0}^n P(x_i)L_i$.
3. Montrer que $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

II) Réduction de l'endomorphisme φ_n .

Pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on désigne respectivement par $Q_k \in \mathbb{C}[X]$ et $R_k \in \mathbb{C}_n[X]$ le quotient et le reste de la division euclidienne de AL_k par B .

1. Soit $(k, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$. Montrer que

$$R_k(x_j) = \begin{cases} A(x_k), & \text{si } k = j \\ 0, & \text{si } k \neq j. \end{cases}$$

2. Déduire que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $\varphi_n(L_k) = A(x_k)L_k$.

(**Indication** : Utiliser la question I)2).)

3. Justifier que l'endomorphisme φ_n est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.