

Examen de Physique 1

PT 2

Durée : 4 Heures

Données:

- * La célérité de la lumière dans le vide $c = 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$
- * La perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$.
- * $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{A}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$ * $\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos(\frac{p+q}{2}) \cos(\frac{p-q}{2})$
- * $\cos(p-q) - \cos(p+q) = 2 \sin(p) \sin(q)$
- * Relations de passage : $\vec{n}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ $\vec{n}_{1 \rightarrow 2} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_s$

L'épreuve est composée de deux problèmes dont les diverses parties sont indépendantes.

Problème I

A- Un miroir pour les ondes électromagnétiques

I.A.1) Réflexion d'une OPPM sur un conducteur parfait

- 1- Énoncer les équations de Maxwell dans une région vide de charges et de courants.
- 2- En déduire l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique.

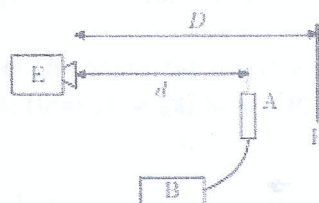
On considère une onde électromagnétique dans le demi-espace $x < 0$, dont le champ électrique est de la forme:

$$\vec{E}_i(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y \quad (\text{I.1})$$

- 3- Préciser la direction et le sens de propagation de cette onde ainsi que son état de polarisation. Cette onde rencontre en $x = 0$ une plaque métallique plane et parfaitement conductrice.
- 4- Rappeler la définition et les propriétés d'un conducteur parfait.
- 5- Le champ électrique de l'onde décrite par l'équation (I.1) vérifie-t-il les conditions aux limites ? Dans le demi-espace $x < 0$, règne aussi une onde de la forme : $\vec{E}_r(M, t) = \vec{E}_{0r} \cos(\omega t + kx)$
- 6- En utilisant les relations de passage, déterminer $\vec{E}_{0r}$.
- 7- Dans le milieu $x < 0$, établir l'expression des champs électrique $\vec{E}(M, t)$ et magnétique $\vec{B}(M, t)$ résultants. Comment qualifier l'onde correspondante ?
- 8- Déterminer les plans nodaux du champ électrique en fonction de la longueur d'onde λ .
- 9- Déterminer la densité de courant surfacique $\vec{j}_s(t)$.

I.A.2) Étude expérimentale

On dispose au laboratoire d'un équipement permettant d'étudier des ondes électromagnétiques dites centimétriques. On réalise l'expérience décrite figure 1, où E est un émetteur d'ondes centimétriques, P une plaque métallique, A une antenne reliée à un boîtier électronique B délivrant une tension continue U proportionnelle à la moyenne temporelle $\langle \vec{E}^2 \rangle$ du champ électromagnétique au niveau de l'antenne A.



Dispositif expérimental à ondes centimétriques Figure 1

10- Déduire de l'enregistrement de la figure 2 la fréquence f des ondes utilisées.

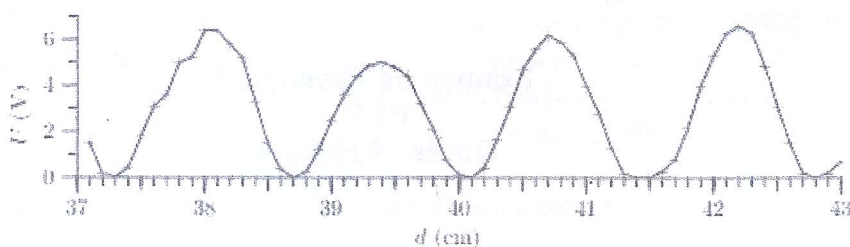


Figure 2

On utilise un émetteur d'ondes centimétriques, générant un champ : $\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$. On remplace le plan métallique de la partie A.1 par une grille métallique, constituée de barreaux parallèles séparés d'une distance très inférieure à la longueur d'onde λ de l'onde   mise par le générateur. On admet que, dans ce cas, la grille se comporte comme un plan conducteur dans lequel les seuls courants électriques qui peuvent s'établir ont même direction que les barreaux. On considère trois situations différentes par l'orientation de la grille par rapport au champ $\vec{E}$ (figure 3).

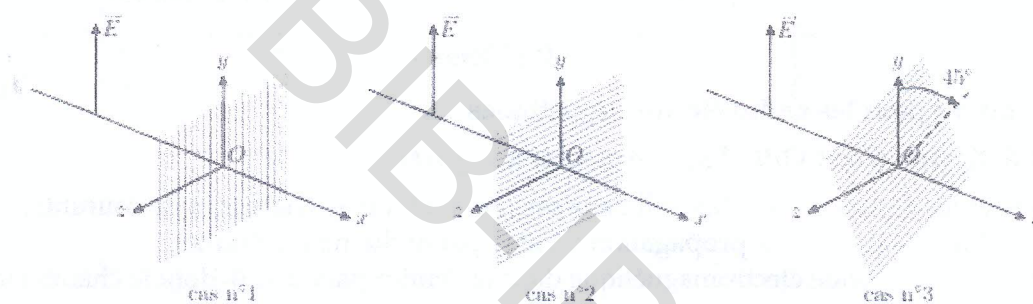


Figure 3

11- Dans chacun de ces cas, décrire le plus précisément possible le champ électrique observé en $x > 0$.

12-    quel dispositif rencontré en travaux pratiques cette grille fait-elle penser ?

I-B- Cavité résonnante

I.B.1) Fréquences propres

On considère une cavité parall  l  pip  dique, vide, et de dimensions $(2a, 2a, d)$. Le champ électrique, solution des équations de Maxwell satisfaisant aux conditions aux limites sur les parois de la cavité supposées parfaitement conductrices, est de la forme :

$$E(x, y, z, t) = \begin{cases} E_x = E_{0x} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \sin(\omega t) \\ E_y = E_{0y} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \sin(\omega t) \\ E_z = E_{0z} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \sin(\omega t) \end{cases}$$

On se propose de déterminer les fréquences des modes de résonance de cette cavité.

13- On considère l'interface $x = 2a$. Quelles sont les composantes qui doivent s'annuler sur cette interface ? En déduire la composante k_x du vecteur d'onde $\vec{k}$ en fonction d'un nombre entier m .

14- En déduire de la même manière les composantes k_y et k_z de ce vecteur, respectivement en fonction des deux entiers n et q .

15- Exprimer les fréquences ν_{mnq} des modes de résonance de la cavité. En déduire la différence de fréquence $\Delta\nu$ entre deux modes longitudinaux ($k_x = k_y = 0$) successifs.

I.B.2) Pertes d'intensité

Les pertes d'énergie électromagnétique dans la cavité précédente ont différentes origines (parois non parfaitement conductrices, pertes par diffusion, par absorption, ...). On considère une cavité

simplifiée à une dimension entre deux plaques conductrices de surface S , situées en $x = 0$ et $x = d$. Ces pertes peuvent être quantifiées en calculant le facteur de qualité Q défini par :

$$Q = \frac{\omega_0 I}{\left| \frac{\Delta I}{\Delta t} \right|}$$

où ΔI est la variation de l'intensité I de l'onde après un aller-retour d'un rayon lumineux dans la cavité, Δt est le temps d'un aller-retour et ω_0 est la pulsation de l'onde (Figure 4).

Soit R le coefficient de réflexion en énergie sur les parois localisées en $z = 0$ et $z = d$. On se placera dans les conditions de Gauss.

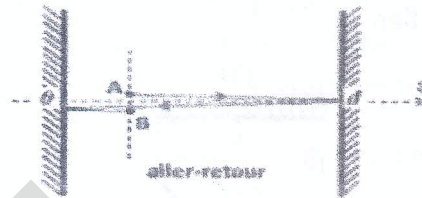


Figure 4

16- Montrer que $Q = \frac{4\pi d}{\lambda_0(1-R^2)}$. Calculer Q pour $R = 0,98$, $d = 30$ cm et $\lambda_0 = 0,63$ μm .

Ces pertes peuvent aussi être traduites en termes de relaxation d'énergie (perte d'intensité).

17- Réécrire l'expression de Q pour un intervalle de temps dt . Montrer alors que l'intensité de l'onde peut s'écrire sous la forme :

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_c}\right)$$

où I_0 est l'intensité de l'onde dans la cavité à $t = 0$. Exprimer τ_c en fonction de ω_0 et Q . Calculer sa valeur.

Cette expression de l'intensité de l'onde permet d'écrire le champ électrique associé sous la forme :

$$E(t) = E_0 e^{i\omega_0 t} e^{-t/2\tau_c}$$

La dépendance spatiale est omise.

Pour passer de l'espace des temps à l'espace des fréquences, on calcule la transformée de Fourier de $E(t)$ définie par :

$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty E(t) e^{-i\omega t} dt$$

18- Calculer $E(\omega)$.

19- Montrer que l'intensité spectrale $I(\omega) = E(\omega)E^*(\omega)$ peut s'écrire sous la forme :

$$I(\omega) = \frac{E_0^2}{4\pi^2} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{1}{2\tau_c}\right)^2}$$

20- Tracer l'allure de $I(\omega)$.

21- Exprimer la largeur à mi-hauteur de $I(\omega)$, exprimant sa largeur spectrale $\Delta\omega$, en fonction de τ_c .

C- Mesure de la largeur d'une raie spectrale

I.C.1) L'interféromètre de Michelson

On considère un interféromètre de Michelson (figure 5) constitué de deux miroirs et d'une lame séparatrice (Sp) idéale, c'est-à-dire infiniment mince n'introduisant aucun déphasage et de coefficient de réflexion énergétique vaut 0,5. Les miroirs (M_1) mobile et (M_2) fixe sont perpendiculaires. On pose $OM_2 = \ell_0$ et $OM_1 = \ell_0 + e$. L'interféromètre est éclairé par une source étendue, d'intensité I_0 . Cette source est supposée monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0 = 630$ nm. On observe la figure d'interférence sur un écran situé dans le plan focal image d'une lentille mince convergente

- de focale $f' = 1 \text{ m}$ et d'axe $(y'y)$. L'ensemble est placé dans l'air, dont l'indice est pris égal à 1.
- 22- Quelles conditions doivent satisfaire deux ondes lumineuses pour produire des interférences ?
- 23- Quel est le rôle de la lame (Sp)? Quel est le rôle de celui de la lentille ?
- 24- Le montage est équivalent à une lame d'air d'épaisseur e . Montrer que la différence des chemins optiques pour un rayon entrant avec une faible inclinaison i est donnée par $\delta = 2e \cos(i)$.
- 25- Exprimer $I(r)$ l'intensité au point M sur l'écran en fonction de $r = F'M$. Décrire la figure d'interférences.
- 26- On mesure $e = 0,5 \text{ mm}$. Calculer le rayon des deux premiers anneaux sombres à partir du centre.
- 27- La largeur de la source intervient-elle sur le contraste des anneaux ? Que détermine-t-elle ?
- 28- On diminue la valeur de e , les anneaux semblent rentrer ou sortir du centre ? Leur nombre augmente ou diminue ? Justifier.

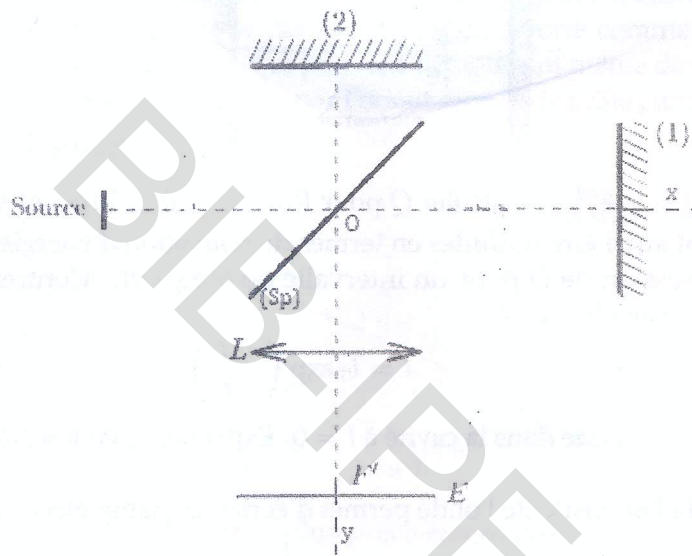


Figure 5

I.C.2) Profil lorentzien

La source primaire n'est plus monochromatique. Elle est caractérisée par un profil spectral lorentzien dont l'intensité spectrale est notée $I_{sp}(\nu)$.

$$I_{sp}(\nu) = \frac{I_m}{1 + \left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu}\right)^2}$$

$\nu = \frac{c}{\lambda}$ désigne la fréquence de l'onde.

On s'intéresse à l'intensité que produirait l'interféromètre en F' .

29- Calculer explicitement $I(e)$, on exprimera le résultat sous la forme $I(e) = C[1 + V(e) \cos(4\pi \frac{\nu_0}{c} e)]$ où C est une constante et $V(e)$ le facteur de visibilité, grandeurs que l'on déterminera.

On donne

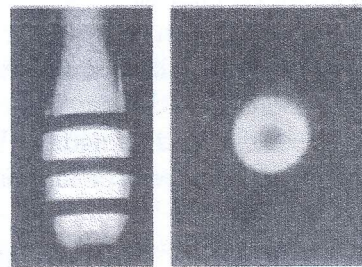
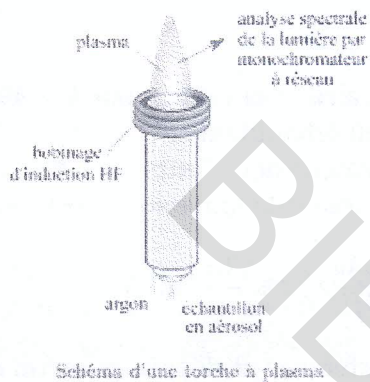
$$\int_0^\infty \frac{\cos(2\pi\alpha x)}{(x - x_0)^2 + \beta^2} dx = \frac{\pi}{\beta} \cos(2\pi\alpha x_0) \exp(-2\pi|\alpha|\beta)$$

30- Déterminer les valeurs e_n correspondantes des franges brillantes.

31- En pratique, on trace la courbe $\ln[I(e_n) - C]$ en fonction de n . On obtient une droite de pente $p = -3 \times 10^{-2}$. Déduire la valeur de $\Delta\nu$.

Problème II : La spectrométrie ICP-AES

Ce problème s'intéresse à quelques aspects de la spectrométrie ICP-AES, acronyme de Inductively Coupled Plasma - Atomic Emission Spectrometry (plasma à couplage inductif - spectrométrie d'émission atomique). Il s'agit d'une technique d'analyse de grande précision permettant la mesure de la nature et de la concentration des éléments qui se trouvent dans les matières solides, les liquides ou les gaz. On peut notamment déterminer grâce à celle-ci l'abondance des métaux lourds dans l'eau du circuit primaire d'une centrale nucléaire ou encore contrôler l'efficacité des résines échangeuses d'ions. Un spectromètre ICP-AES utilise une torche à plasma (figure 1). À la base de la torche sont introduits de l'argon, ainsi que l'échantillon à analyser à l'état d'aérosol (microgouttelettes d'un diamètre maximum de l'ordre de $100\text{ }\mu\text{m}$). Le plasma est initié par l'envoi d'une décharge électrique et doit ensuite être entretenu à l'aide d'un bobinage qui crée un champ magnétique variable à haute fréquence.



Photographies du plasma d'une torche
Vue latérale à gauche et vue axiale à droite

Figure 1

Dans le plasma, à plusieurs milliers de kelvins, l'échantillon est vaporisé, dé-solvaté, atomisé voire ionisé. Les atomes sont ionisés si leur énergie d'ionisation est inférieure à celle de l'argon, ce qui est le cas de la plupart des éléments chimiques. Chaque atome ou ion excité émet plusieurs photons (rayonnement lumineux) à des longueurs d'onde qui lui sont propres lors de son retour à l'état fondamental. La lumière est envoyée vers un monochromateur à réseau dont la résolution spectrale en longueur d'onde est très élevée, voisine de 20 pm . Les signaux lumineux sont mesurés par un capteur qui permet l'analyse de longueurs d'onde allant de 166 à 847 nm , l'intensité des pics émis étant fonction de la concentration de l'échantillon initial.

Nous allons dans un premier temps étudier un modèle simple de la partie optique du dispositif. Ensuite, nous nous intéresserons aux effets du champ magnétique variable sur le plasma.

A- Spectroscopie et résolution

II.A.1) Interférences à deux ondes

On considère le dispositif de la figure 2. Une pupille dans le plan perpendiculaire à l'axe (Oz) est percée de deux trous d'Young identiques espacés de la distance $a = 100\text{ }\mu\text{m}$. Une onde plane progressive monochromatique de longueur d'onde λ (dans l'air, assimilé au vide) éclaire cette pupille en incidence normale. On observe la figure obtenue dans le plan focal image d'une lentille convergente de centre optique O et d'axe optique (Oz) et de distance focale $f' = 20\text{ cm}$. On repère un point M de l'écran recevant les ondes issues des deux trous par ses coordonnées cartésiennes (x, y, f') . On se place dans cette partie dans les conditions de Gauss.

- 1- Établir l'expression de la différence de marche $\delta(M)$ en fonction de a , x et f' .
- 2- Les vibrations lumineuses arrivant en S_1 et S_2 sont en phase. Elles sont données par :

$$s_1(S_1, t) = s_1(S_2, t) = s_0 \cos \left(\omega t + \varphi_0(t) - \frac{2\pi}{\lambda} L \right)$$

Que représentent L et $\varphi_0(t)$? Expliquer pourquoi φ_0 est fonction du temps.

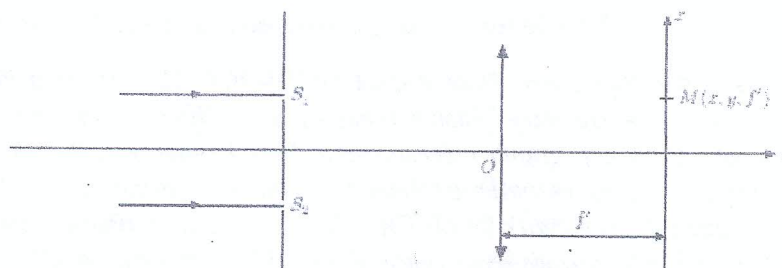


Figure 2

3- Montrer que l'intensité lumineuse $I(M) = \langle s^2(M, t) \rangle_t$ est exprimée par :

$$I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi a}{\lambda f'} x \right) \right)$$

Expliciter I_0 en fonction de s_0 .

4- Décrire la figure que l'on observe sur l'écran.

5- Définir l'interfrange i de la figure d'interférence. Calculer sa valeur pour $\lambda = 499,3 \text{ nm}$ (longueur d'onde associée à une raie du nickel présent dans un échantillon).

6- La source qui éclaire le dispositif de la figure 2, émette deux longueurs d'onde $\lambda = 499,3 \text{ nm}$ et $\lambda + \Delta\lambda$ où $\Delta\lambda \ll \lambda$. Montrer que la répartition de l'intensité lumineuse sur l'écran est donnée par

$$I(x) = 4I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{\pi \Delta\lambda a}{\lambda^2 f'} x \right) \cos \left(\frac{2\pi a}{\lambda f'} x \right) \right]$$

Identifier le facteur de visibilité et le terme d'interférence et décrire ce qu'on doit observer sur l'écran. Qu'appelle-t-on ce phénomène ?

7- Calculer la position x_1 du premier brouillage sachant que $\Delta\lambda = 20 \text{ pm}$. Expliquer pourquoi le dispositif de fentes de Young ne convient pas pour un spectromètre ICP-AES.

II.A.2) Interférences à N ondes

On considère à présent un réseau constitué de N ouvertures identiques ($N > 2$), distantes de a suivant l'axe parallèle à (Ox) . Ces N ouvertures sont éclairées par une onde plane progressive monochromatique en incidence normale de longueur d'onde λ . Sur la figure 3, l'angle θ , orienté selon le sens trigonométrique, indique une direction des interférences à l'infini à N ondes.

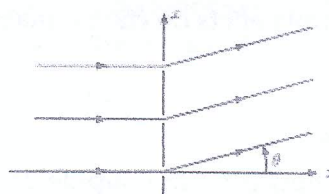


Figure 3

8- Expliciter le déphasage φ entre deux ondes issues de trous successifs en fonction de λ , a et $\sin(\theta)$.

9- Justifier que ces N ondes peuvent donner un phénomène d'interférence et qu'on observe un maximum d'intensité si on a $\varphi = 2p\pi$ avec p un entier relatif accessible. Comment appelle-t-on l'entier p ?

10- Le réseau utilisé dans certains spectromètres ICP-AES comporte 1800 ouvertures par millimètre. Calculer numériquement θ_1 , correspondant au pic $p = 1$, pour $\lambda = 499,3 \text{ nm}$.

11- Montrer que, si on désigne par $s_1(t) = s_0 \exp(i\omega t)$ la vibration lumineuse passant de l'ouverture située en $x = 0$, l'intensité lumineuse donnée par l'onde résultante s'écrit sous la forme :

$$I = (Ns_0)^2 \left(\frac{\sin \left(\frac{N\varphi}{2} \right)}{N \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right)} \right)^2$$

12- Établir que la demi-largeur d'un pic d'intensité lumineuse est donnée par $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{N}$ et en déduire la demi-largeur angulaire $\Delta\theta$ du pic observé dans la direction θ_1 . Évaluer numériquement $\Delta\theta_1$, sachant que les N ouvertures éclairées du réseau occupent une largeur $\ell = 5$ cm.

13- On considère que la source émet une deuxième longueur d'onde λ' très proche de λ . On note θ'_1 l'angle d'observation du premier pic ($p = 1$) correspondant à la longueur d'onde λ' . On admet que l'on peut séparer les deux pics seulement si l'écart $|\theta'_1 - \theta_1| \geq \Delta\theta_1$. On définit le pouvoir de résolution du dispositif $\mathcal{R} = \frac{\lambda}{|\lambda - \lambda'|}$. Montrer que $\mathcal{R} = N$.

14- Évaluer numériquement la résolution du réseau utilisé. Proposer des raisons visant à expliquer la différence entre cette valeur et celle, voisine de 20 pm, d'un spectromètre ICP-AES.

B – Interaction champs – plasma dans la torche

L'étude analytique du plasma de la torche de la figure 1 est complexe en raison notamment de la géométrie cylindrique du dispositif, de la forme du bobinage d'induction haute fréquence, de l'écoulement du gaz, des effets thermiques... On va néanmoins chercher à dégager quelques aspects physiques à l'aide d'une approche simplifiée en géométrie unidimensionnelle cartésienne. On repère un point de l'espace par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans une base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Le plasma est un gaz composé d'ions supposés fixes et d'électrons mobiles. Il est localement neutre dans tout le domaine $-a < x < a$ qu'il occupe et où sa densité électronique n est uniforme et constante. Le domaine du plasma est délimité par deux lames planes identiques (épaisseur b) qui modélisent le bobinage inducteur haute fréquence. La lame de droite est parcourue par un vecteur densité de courant électrique uniforme $J(t)\vec{e}_y$ et celle de gauche par le vecteur opposé $-J(t)\vec{e}_y$ (figure 4). On néglige les effets de bords selon les directions y et z .

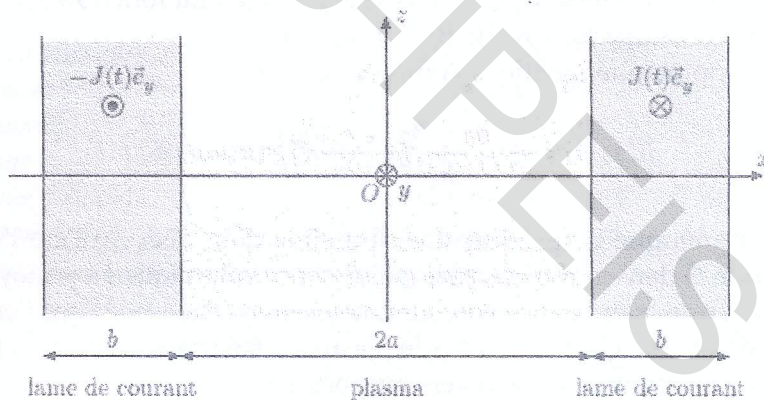


Figure 4

On admet dans toute la suite que les fréquences de travail sont suffisamment faibles pour se placer dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires magnétiques. Cette hypothèse permet d'écrire les équations de Maxwell sous la forme approchée suivante :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

II.B.1) Champ magnétique produit par les lames

15- Déterminer, en explicitant soigneusement l'argumentation, le champ magnétique produit dans tout l'espace uniquement par la lame de gauche (on ne tiendra donc pas compte de l'autre lame et du plasma).

16- En déduire le champ magnétique produit dans tout l'espace par l'ensemble des deux lames, sans tenir compte du plasma. Représenter en fonction de x , pour une valeur donnée de $J(t)$ non nulle, le profil de ce champ magnétique.

II.B.2) Propriétés dans le plasma

17- Expliquer qualitativement pourquoi il peut exister dans le plasma un champ électrique dû aux courants dans les lames. Montrer qu'il s'écrit sous la forme $\vec{E}(x, t) = E(x, t)\vec{e}_y$ et justifier que $E(x, t)$ est une fonction impaire de la variable x .

18- Le champ magnétique qui règne dans le plasma ne correspond pas à celui produit par les lames calculé précédemment. Expliquer qualitativement pourquoi. Montrer qu'il s'écrit sous la forme $\vec{B}(x, t) = B(x, t)\vec{e}_z$ et justifier que $B(x, t)$ est une fonction paire de la variable x .

19- Le vecteur densité de courant électrique dans le plasma s'écrit $\vec{j}(x, t) = j(x, t)\vec{e}_y$. Expliciter, d'une part, l'équation aux dérivées partielles reliant $E(x, t)$ et $B(x, t)$ et, d'autre part, celle reliant $B(x, t)$ et $j(x, t)$.

À ce stade, il manque une loi de réponse du plasma (c'est-à-dire une relation liant $\vec{j}(x, t)$ et $\vec{E}(x, t)$) afin d'accéder aux profils des divers champs en son sein.

II.B.3) Modèle collisionnel

Dans ce modèle, on considère que la densité du plasma est telle qu'il n'est pas possible de négliger les collisions en son sein. On admet qu'il se comporte alors comme un milieu ohmique, c'est-à-dire que $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, où $\sigma = 1 \times 10^3 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ est la conductivité électrique réelle du plasma, supposée uniforme et constante.

20- Établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $B(x, t)$ en introduisant $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$.

21- Quelle est la dimension de δ ? Justifier. Calculer sa valeur pour $\omega = 10^7 \text{ rad.s}^{-1}$.

On se place en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω . Le champ magnétique dans le plasma est associé au champ complexe $\vec{B}(x, t) = f(x) \exp(i\omega t)\vec{e}_z$. La fonction $f(x)$ est a priori à valeurs complexes. On pose la constante réelle $B_0 = f(a) = f(-a)$.

22- Montrer que le champ magnétique complexe s'écrit :

$$\vec{B}(x, t) = \frac{B_0}{\text{ch}(\frac{1+i}{\delta}a)} \text{ch}(\frac{1+i}{\delta}x) \exp(i\omega t) \vec{e}_z$$

Une fois le champ magnétique déterminé, il est possible d'en déduire l'expression du champ électrique complexe $\vec{E}(x, t)$ dans le plasma, puis la puissance volumique moyenne cédée au plasma. Le profil en fonction de x de la puissance volumique moyenne $\langle P_{\text{vol}} \rangle$, que l'on peut calculer à partir de l'expression du champ électrique dans le plasma, a été représenté sur la figure 5 pour $a = 1 \text{ cm}$ et pour diverses pulsations ω , donc divers rapports a/δ .

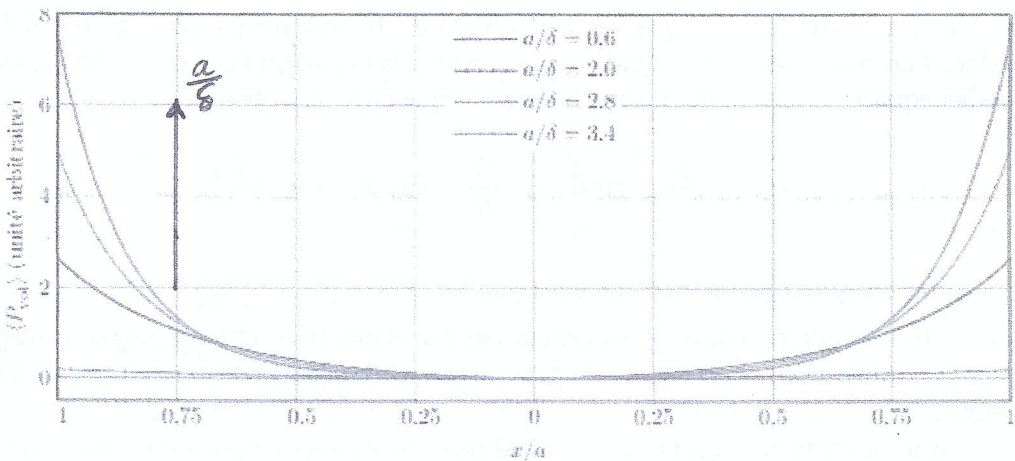


Figure 5

23- Commenter l'évolution observée du profil de $\langle P_{\text{vol}} \rangle$ avec la pulsation en liaison avec les phénomènes physiques sous-jacents.

Fin de l'épreuve