

Examen semestriel N°2

Durée: 2h

Epreuve: Analyse

Date: 05-05-2025

Problème :

Un robot se déplace entre deux points A et B . À chaque instant $n \in \mathbb{N}^*$, le robot se trouve en B avec probabilité $p \in]0, 1[$, et se trouve en A avec probabilité $q = 1 - p$. Le passage d'un instant au suivant se fait alors d'une manière indépendante.

Pour une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, on rappelle que la série génératrice de X est donnée par $\sum_{k \geq 0} t^k P(X = k)$ et que sa somme G_X est appelée fonction génératrice de X .

Partie I :

Dans cette partie on suppose que le robot part du point A (à l'instant $n = 0$) et que l'expérience s'arrête dès qu'il se trouve en B . Soit Y l'instant "n" où le robot se trouve en B .

1. Reconnaître la loi de la variable aléatoire Y et donner $P(Y = n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Donner $E(Y)$ et $V(Y)$.

On note R_Y le rayon de convergence de la série génératrice de Y et on note G_Y la fonction génératrice de Y .

3. Montrer que $R_Y = \frac{1}{q}$ et que pour tout $t \in \left] -\frac{1}{q}, \frac{1}{q} \right[$: $G_Y(t) = \frac{pt}{1-qt}$.

4. Justifier que G_Y est deux fois dérivable en 1 et calculer $G_Y'(1)$ et $G_Y''(1)$.

5. Retrouver alors $E(Y)$ et $V(Y)$.

Partie II :

Soit $z \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(a) = -\frac{1}{a^{n+1}}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série $\sum_{n \geq 0} u_n(a)z^n$ et calculer sa somme sur $] -R, R[$.

Dans les questions suivantes, on suppose $|a| < |b|$. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \sum_{k=0}^n u_k(a)u_{n-k}(b).$$

2. Montrer que : $v_n = \frac{1}{ab^{n+1}} \sum_{k=0}^n \left(\frac{b}{a}\right)^k = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{a^{n+1}} - \frac{1}{b^{n+1}}\right)$.

3. Justifier l'équivalence $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(b-a)a^{n+1}}$.

4. En déduire que le rayon de convergence de $\sum v_n z^n$ est égal à $|a|$ et que pour $|z| < |a|$:

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n z^n.$$

5. Déduire que la fonction $f : t \mapsto \frac{t^2}{(t-a)(t-b)}$ est développable au voisinage de 0 en une série entière de rayon de convergence $|a|$. Donner son développement.

Partie III :

Dans cette partie on suppose que le robot part du point A (   l'instant $n = 0$) et que l'expérience s'arrête dès qu'il se trouve deux instants consécutifs au point B . On pose Z l'instant " n " où l'expérience s'arrête. On considère les   v  nements $A_k =$ "Le robot se trouve en A à l'instant k " et $B_k =$ "Le robot se trouve en B à l'instant k ". On note $p_n = P(Z = n)$.

1. Calculer p_2 et p_3 .
2. Justifier que $(A_1, B_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2)$ est un système complet d'  v  nements.
3. Montrer que pour tout $n \geq 4$: $p_n = qp_{n-1} + pqp_{n-2}$.

On note G_Z la fonction génératrice de Z .

4.   tablir que pour $|t| \leq 1$: $G_Z(t)(1 - qt - pqt^2) = p^2t^2$.
5. On pose pour $t \in \mathbb{R}$: $Q(t) = 1 - qt - pqt^2$.
Vérifier que $Q(t) = -pq(t-a)(t-b)$ où a et b sont deux réels à déterminer en fonction de p et q tels que $|a| < |b|$.
6. En utilisant la question II. 5., montrer que le rayon de convergence de la série génératrice de Z est égal à $|a|$.
7. Déterminer p_n en fonction de n , a et b pour tout $n \geq 4$.
8. Justifier que Z admet une   sperance finie et la calculer.

Exercice :

— Le rayon spectral d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de spectre non vide, est défini par : $\rho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \text{sp}(A)\}$ où $\text{sp}(A)$ désigne le spectre de A .

— On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne : $\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$.

— $S_n(\mathbb{R})$ désigne le sous espace des matrices symétriques réelles.

1. Justifier l'existence de $\rho(A)$ pour $A \in S_n(\mathbb{R})$.
2. On considère une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
Montrer que pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a : $\|DY\|_2 \leq \max\{|\lambda_k|; 1 \leq k \leq n\} \|Y\|_2$.
3. Déduire que pour $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a : $\|AX\|_2 \leq \rho(A) \|X\|_2$. (On rappelle que pour $A \in S_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice D diagonale et une matrice P orthogonale tels que : $A = PDP^T$.)
4. Soient $A, B \in S_n(\mathbb{R})$, λ une valeur propre de $A + B$ et X_λ un vecteur propre associé à λ . Montrer que : $|\lambda| \|X_\lambda\|_2 \leq (\rho(A) + \rho(B)) \|X_\lambda\|_2$.
5. Montrer que ρ est une norme sur $S_n(\mathbb{R})$.
6. pour $A \in S_n(\mathbb{R})$. Vérifier, pour $k \in \mathbb{N}^*$: $\rho(A^k) = \rho(A)^k$, et déduire que $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0 si et seulement si $\rho(A) < 1$.
7. Retrouver par une autre méthode le résultat de la question précédente.