

Devoir de contrôle de Physique 2

PT 2

Durée : 2 Heures

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.

Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré. Si, au cours de l'épreuve, un étudiant repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'épreuve comporte deux problèmes indépendants.

Problème I : Hypothermie d'un plongeur sous-marin

Préliminaires

On considère un corps homogène de section droite S , de longueur L , de masse volumique ρ , de conductivité thermique λ , de capacité thermique massique c , considérées toutes des constantes. La température du matériau ne dépend que de x et de t et sera notée $T(x, t)$. Les parois parallèles à l'axe x sont isolées thermiquement et on note $\vec{j}(x, t)$ le vecteur densité de courant thermique.

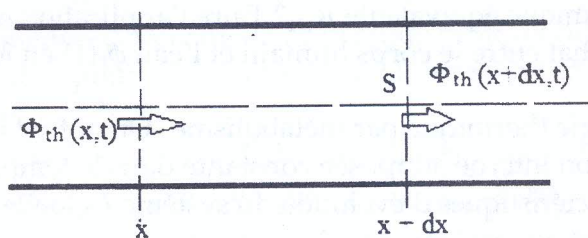


Figure 1

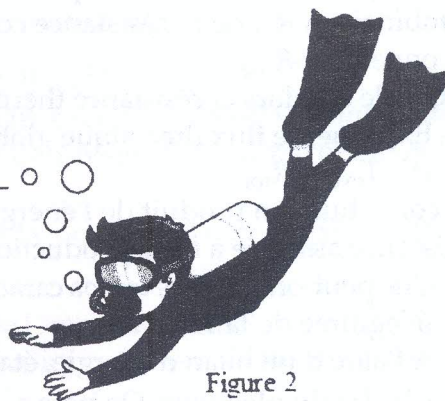


Figure 2

- 1- Énoncer la loi de Fourier en précisant les unités des différents termes ainsi que la signification du signe $-$.
- 2- Effectuer un bilan énergétique pour un volume élémentaire (Figure 1) compris entre les abscisses x et $x + dx$ entre les instants t et $t + dt$, en supposant qu'il n'existe pas d'apport énergétique autre que par conduction et qu'il n'y a pas production d'énergie interne. Établir alors l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $T(x, t)$ et la mettre sous la forme:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

On exprimera D en fonction de c , ρ et λ .

- 3- On se place en régime stationnaire. On suppose que les extrémités du matériau sont

maintenues à des températures $T_1 = T(0)$ et $T_2 = T(L) < T_1$. Déterminer $T(x)$.

4- Soit Φ_{th} le flux thermique à travers la section droite S du matériau. Déterminer $J(x)$ et Φ_{th} . Commenter.

5- En faisant l'analogie avec l'électrocinétique, définir puis calculer la résistance thermique R_{th} du matériau pour $L = 3 \text{ mm}$, $S = 1,3 \text{ m}^2$ et $\lambda = 4,4 \times 10^{-2} \text{ USI}$.

Processus de transfert d'énergie entre le corps d'un plongeur et l'eau (Figure 2) :

Le corps possède une résistance de conduction thermique notée $R_{cd} = 3 \times 10^{-2} \text{ USI}$. Nous noterons $T_{int}(t)$ la température interne du plongeur et $T_{ext} = 288 \text{ K}$ la température de l'eau. Le plongeur de masse $m = 60 \text{ kg}$ se trouve dans l'eau équipé de sa combinaison en néoprène de coefficient de diffusion $D = 2 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Cette combinaison a une résistance thermique R_n (égale à celle calculée en 5/). Le plongeur subit des pertes thermiques au niveau de sa peau et de sa combinaison.

6- On modélise les pertes par convection à l'extérieur de la combinaison de température T_n par la loi de Newton en introduisant un coefficient de transfert conducto-convectif : $h = 10 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$. Donner le flux thermique traversant une surface S et en déduire la résistance thermique R_{cv} associée. Calculer sa valeur pour $S = 1,3 \text{ m}^2$.

7- On modélise les pertes par rayonnement par un flux thermique surfacique $\varphi_{rad} = \sigma (T_n^4 - T_{ext}^4)$ où $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ est appelée la constante de Stefan. On suppose que $|T_n - T_{ext}| \ll T_{ext}$. Montrer que l'on peut associer une résistance thermique R_{ray} à ces pertes par rayonnement et l'exprimer en fonction de σ , T_{ext} et S la surface d'échange. Calculer sa valeur.

8- Faire un schéma électrique équivalent du système en indiquant les différentes résistances thermiques. On tiendra compte de la résistance thermique du corps R_{cd} , de celle de la combinaison R_n , de la résistance conducto-convective R_{cv} et de la résistance associée au rayonnement R_{ray} .

9- Quelle est alors la résistance thermique équivalente R_{tot} ? Faire l'application numérique.

10- Exprimer le flux thermique global entre le corps humain et l'eau $\phi_t(t)$ en fonction de $T_{int}(t)$, T_{ext} et R_{tot} .

Le corps humain produit de l'énergie thermique par métabolisme. On note $P = 116 \text{ W}$ la puissance associée à cette production interne supposée constante dans le temps.

11- Que peut-on dire des temps caractéristiques d'évolution du système ? Quelle hypothèse est-il légitime de faire ici ?

12- A l'aide d'un bilan d'énergie, établir une équation différentielle vérifiée par la température $T_{int}(t)$ du plongeur. On note $c_p = 3,5 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ la capacité thermique massique du corps.

13- On désigne par $T_m = T_{ext} + R_{tot}P$ et $T_0 = T_{int}(t = 0) = 310 \text{ K}$. Montrer que :

$$T_{int}(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-t/\tau}$$

On exprimera τ en fonction de R_{tot} , m et c_p .

14- L'état d'hypothermie est atteint lorsque la température du plongeur tombe en dessous de $T_{hyp} = 308 \text{ K}$. Calculer le temps t_{hyp} au bout duquel l'hypothermie est atteinte.

15- Que serait la valeur de t_{hyp} en absence de combinaison ? Conclure.

Problème II : Particule encagée dans un puits de potentiel infini

1- Citer trois physiciens ainsi que leurs contributions dans l'élaboration de la physique quantique.

2- Décrire une expérience mettant en évidence la notion d'onde de matière.

On considère une particule, de masse m et d'énergie E , se déplaçant sur l'axe des x dans un potentiel $V(x)$ tel que

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Son état quantique est caractérisé par une fonction d'onde $\psi(x, t)$ solution de l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) + V(x) \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t)$$

On note $\psi(x, t) = \varphi(x) e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$ la fonction d'onde stationnaire de la particule.

3- Quelle est la signification physique de $dP = |\psi(x, t)|^2 dx$?

4- Montrer que $\varphi(x)$ vérifie l'équation de Schrödinger indépendante du temps :

$$\varphi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x)) \varphi(x) = 0$$

5- Justifier que pour les domaines $x < 0$ et $x > L$, la seule solution possible est $\varphi(x) = 0$.

6- À partir de la résolution de l'équation de Schrödinger, déterminer les valeurs des niveaux d'énergie $E_n = n^2 E_1$, $n \geq 1$ où on exprimera E_1 en fonction de m , L et $\hbar$.

7- Montrer que les fonctions d'onde sont données par $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

8- Représenter la densité de probabilité pour les deux premiers niveaux. Commenter.

9- Calculer, pour $n = 1$ et $n = 2$, la probabilité de présence de la particule entre les abscisses $\frac{L}{4}$ et $\frac{3L}{4}$.

10- Calculer, pour $n = 1$, l'écart quadratique de la position $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - (\langle x \rangle)^2}$ en fonction de L . On rappelle que $\langle x^r \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r dP$.

11- Calculer $\Delta x \Delta p$ sachant que l'écart quadratique de l'impulsion est $\Delta p = \frac{\hbar\pi}{L}$. Commenter.

12- On adopte dans cette question un traitement classique. On considère une particule de masse m et d'énergie E piégée dans l'intervalle $[0, L]$.

a- Décrire le mouvement d'une particule classique dans une cuvette de potentiel.

b- On admet que la densité de probabilité de présence classique de la particule entre x et $x + dx$ est proportionnelle à la durée de passage dt entre ces deux abscisses.

Montrer qu'après normalisation, la densité de probabilité de présence s'exprime $\frac{dP}{dx} = \frac{1}{L}$.

c- Calculer la probabilité de présence de la particule entre les abscisses $\frac{L}{4}$ et $\frac{3L}{4}$. Commenter.

$$\text{On donne : } \int_0^\pi u \sin^2(u) du = \frac{\pi^2}{4}, \quad \int_0^\pi u^2 \sin^2(u) du = \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}, \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^2(u) du = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

Fin de l'épreuve