

Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieur de SFAX
Département de Technologie

09 Mai 2025

* * * *

CONCOURS BLANC DE PHYSIQUE

PT 2

Durée : 4 H



L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.

Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré. Si, au cours de l'épreuve, un étudiant repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'épreuve comporte deux problèmes indépendants.

Données :

- * La masse d'un électron $m = 9,1 \times 10^{-31}$ kg
- * Un électron-volt $eV = 1,6 \times 10^{-19}$ J
- * La constante de Planck réduite $\hbar = 1,05 \times 10^{-34}$ Js
- * La constante de Boltzmann $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ JK⁻¹.
- * La célérité de la lumière dans le vide $c = 3 \times 10^8$ ms⁻¹
- * La constante de Rydberg énergétique $\mathcal{R}_y = \frac{m}{32} \left(\frac{e^2}{\pi \hbar \epsilon_0} \right)^2 = 21,79 \times 10^{-19}$ J
- * $\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$ * $\text{rot}(\text{rot}(\vec{A})) = \text{grad}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$
- * Le Laplacien en coordonnées cylindriques : $\Delta f(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Problème 1 : Applications de l'induction électromagnétique

La découverte du phénomène d'induction électromagnétique par Oersted et Faraday au XIX siècle a enclenché une révolution dans la modernité, conduisant notamment à l'invention de l'alternateur ou de moteur. Dans la vie de tous les jours, on connaît également l'usage de l'induction électromagnétique comme dans le cas des plaques de cuisson. On se propose alors d'étudier deux applications de ce phénomène :

- Détecteur de métaux dans la partie A.
- La forge des métaux dans la partie B.



Les deux parties sont indépendantes.

A - Détecteur de métaux

Les détecteurs de métaux sont des instruments électroniques capables d'indiquer la présence de masses métalliques de nature et de taille différentes. Il contient Une bobine parcourue par un courant électrique variable génère un champ magnétique variable auquel sont soumis les objets situés dans la zone de détection. En réponse, les objets conducteurs sont le siège de courants induits appelés **courants de Foucault**. Ces courants induits dans la matière engendrent à leur tour un champ magnétique qui est perçu par un circuit de détection.

Plus précisément, un détecteur à battement de fréquence utilise deux oscillateurs à bobines dont les fréquences d'oscillations sont identiques en l'absence d'objets à détecter.

L'un des deux oscillateurs fonctionne comme **émetteur**. Sa fréquence d'oscillations f_r sert de référence et ne doit pas varier au cours de l'expérience. La bobine qu'il contient doit être tenue loin des objets à détecter.

L'autre oscillateur fonctionne comme **récepteur**. La bobine qu'il contient réagit au champ magnétique induit par les courants de Foucault, ce qui provoque une variation de sa fréquence d'oscillations. La comparaison des fréquences des deux oscillateurs renseigne sur la détection d'un objet métallique.

A-1- Étude d'un oscillateur

Étudions d'abord le circuit de la figure 1-a représenté ci-dessous. L'amplificateur opérationnel étant idéal ($i^+ = i^- = 0$) et fonctionnant en régime linéaire ($v^+ = v^-$).

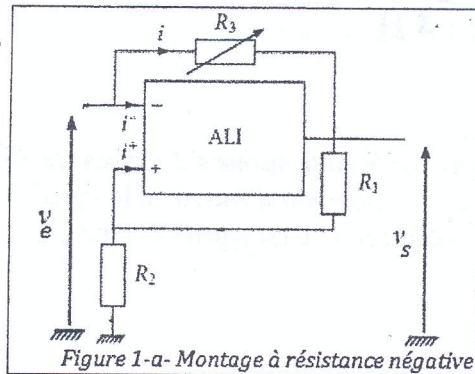


Figure 1-a- Montage à résistance négative

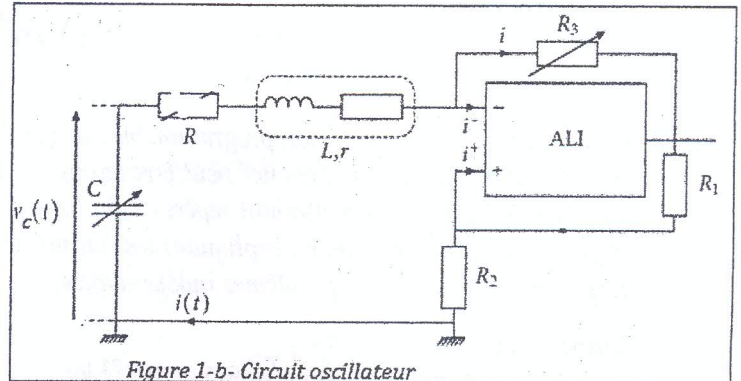


Figure 1-b- Circuit oscillateur

1) Montrer que la tension $V_e(t)$, à l'entrée de l'amplificateur opérationnel peut s'exprimer par :

$$V_e(t) = -R_N i(t) \quad \text{avec} \quad R_N = \frac{R_2 R_3}{R_1}$$

Justifier l'appellation "montage à résistance négative" associée au circuit.

2) On étudie maintenant le circuit représenté sur la figure 1-b. Montrer que l'équation différentielle satisfaite par l'intensité $i(t)$ du circuit de l'oscillateur se met sous la forme :

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Donner l'expression du coefficient ζ en fonction de R_N , R , r , C et L .

3) Déterminer la valeur de R_N qui conduit à des oscillations purement harmoniques non amorties, en indiquant la fréquence des oscillations. Quelle est la source d'énergie permettant de compenser l'effet Joule présent dans les résistances du montage ?

4) Quel est l'intérêt de prendre un condensateur de capacité variable ?

A-2- Principe d'un détecteur de métaux

Pour fabriquer le détecteur de métaux, on associe deux circuits oscillateurs semblables au précédent. On note $f_r \approx 7,5 \text{ kHz}$ la fréquence fixe du circuit de référence et f_d la fréquence variable du circuit de détection. En l'absence de détection, les fréquences d'oscillations sont identiques : $f_r = f_d = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

A-2-1- Circuit de détection

Lorsqu'un métal est présent dans le champ de la bobine de détection (d'inductance propre L), on admet que le métal détecté se comporte comme une bobine d'inductance propre L_m et de résistance négligeable. Le couplage entre les deux inductances est matérialisé par une inductance mutuelle M . L'inductance propre du circuit de détection se trouve alors modifiée et devient L' (Figure 2).

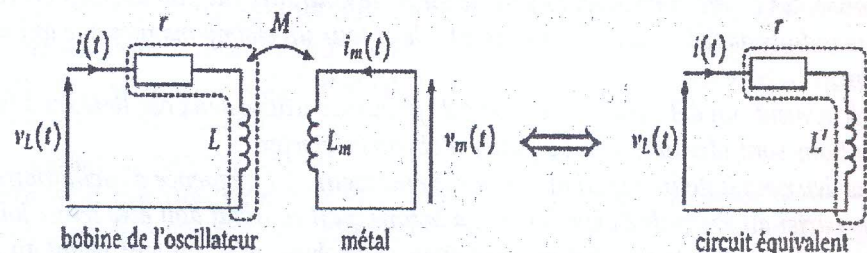


Figure 2 - Circuit de détection équivalent en présence d'un métal

5) Énoncer l'équation de Maxwell qui décrit les phénomènes d'induction électromagnétique. Intégrer cette équation pour établir la loi de Faraday et définir les grandeurs intervenant dans cette loi.

6) Écrire la loi des mailles et en déduire que $\frac{di_m}{dt} = -\frac{M}{L_m} \frac{di}{dt}$

En déduire alors que la tension $v_L(t)$ peut se mettre sous la forme :

$$v_L(t) = ri + L' \frac{di}{dt} \quad \text{avec} \quad L' = L \left(1 - \frac{M^2}{LL_m} \right)$$

7) Sachant que $M^2 \ll LL_m$, en déduire que la détection d'un métal engendre une variation relative de la fréquence d'oscillation du détecteur de la quantité : $\frac{\Delta f}{f_r} = \frac{1}{2} \frac{M^2}{LL_m}$

A-2-2- Traitement de la différence de fréquences

On note respectivement $V_r(t) = V_{r0} \cos(2\pi f_r t)$ et $V_d(t) = V_{d0} \cos(2\pi f_d t)$ les tensions des oscillateurs de référence et de détection. Le montage de la figure 3 comprend un multiplieur, de coefficient K , réalisant l'opération : $V_X(t) = K \cdot V_d(t) \cdot V_r(t)$

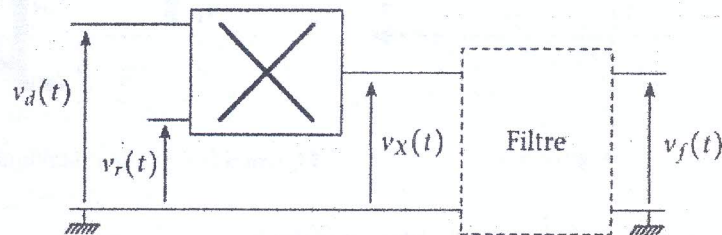


Figure 3 – Circuit de détection de différence de fréquences

8) Établir l'expression de la tension $V_X(t)$ en sortie du multiplieur et représenter son spectre.

9) Sachant que l'on souhaite obtenir en sortie du filtre un signal permettant de déterminer la différence de fréquence $\Delta f = |f_r - f_d|$, proposer un montage passif simple permettant d'isoler la composante pertinente du signal. Donner une valeur numérique approchée de sa fréquence de coupure.

10) Lors d'une tentative de détection, le signal $V_X(t)$ suivant a été enregistré en sortie du multiplieur

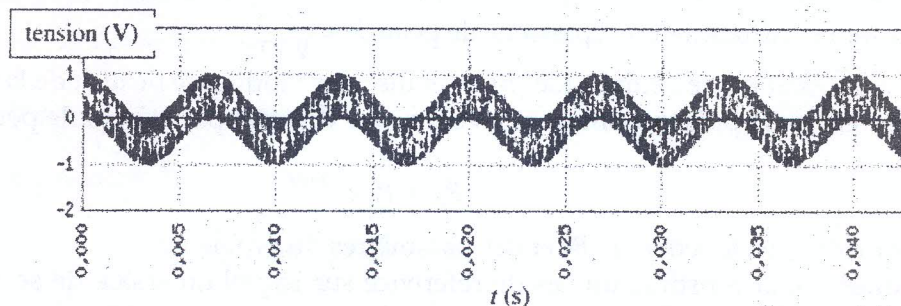


Figure 4- Tension enregistrée en sortie du multiplieur

En déduire l'écart Δf entre les deux fréquences des oscillateurs et prévoir ce qui sera détecté en sortie du filtre.

B - Forge des métaux par induction

Depuis quelques années, des dispositifs de chauffage par induction ont été développés dans le domaine de la forge. L'objectif de cette partie est de trouver les meilleurs paramètres de travail pour optimiser la puissance transmise à la pièce métallique.

11) Rappeler la définition d'un corps noir.

12) On assimile l'acier à un corps noir. Pourquoi devient-il rouge-orange lorsqu'il est chauffé ?

B-1- Inducteur placé au-dessus d'une plaque semi-infinie

Dans un premier temps, on considère une plaque d'acier semi-infinie, de conductivité électrique γ , contenue dans le demi-espace $z > 0$. Un inducteur placé en dessous de la plaque génère un champ magnétique homogène aligné selon l'axe (Ox) à la surface de celle-ci (Figure 5-a). On cherche à déterminer les courants induits dans la pièce d'acier. Pour cela, il est nécessaire de calculer les champs magnétique $\vec{B}(\vec{r}, t)$ et électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ dans l'acier. Le milieu considéré étant localement neutre et caractérisé par une perméabilité magnétique μ .

Dans ce problème, on adopte l'approximation des régimes quasi-stationnaire ARQS magnétique.

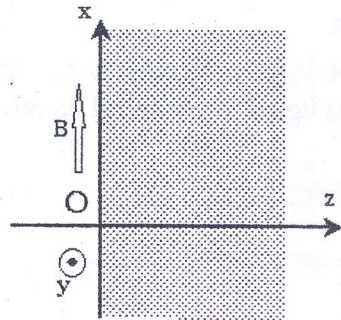


Figure 5-a

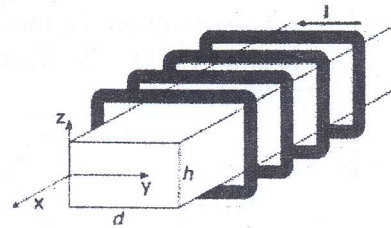


Figure 5-b : Plaque métallique avec inducteur

- 13) Écrire les équations de Maxwell dans le milieu.
- 14) Rappeler la loi d'Ohm reliant les courants induits $\vec{J}$ au champ électrique $\vec{E}$.
- 15) En exploitant les symétries et invariances du système, justifier que $\vec{B}(M, t) = B(z, t)\vec{e}_x$.
- 16) Établir l'équation :

$$\Delta \vec{B} = \mu \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (*)$$

On se place dans la suite en régime sinusoïdale à la pulsation ω : $\vec{B}(M, t) = \vec{B}(M)e^{i\omega t}$ tel que $i^2 = -1$.

- 17) Déterminer la solution de l'équation (*) (en introduisant B_0 , la valeur de $B(M)$ en $z = 0$). On prendra soin d'introduire une épaisseur de peau $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu \gamma \omega}}$.
- 18) Tracer l'évolution de l'amplitude $|\vec{B}(z)|$ et discuter l'influence de ω et de la perméabilité μ .
- 19) Montrer que la puissance moyenne volumique dissipée par effet Joule peut se mettre sous la forme :

$$P_v = P_0 e^{-2z/\delta}$$

on exprimera P_0 en fonction de B_0 et des paramètres du problème.

Ce premier calcul constitue un cas de référence sur lequel on essaie de se ramener lorsque la géométrie est modifiée.

B-2 Inducteur enroulé autour d'une plaque métallique

On considère désormais une plaque métallique comme représentée sur le schéma de la figure 5-b. Cette plaque a une géométrie parallélépipédique de longueur ℓ (considérée comme infinie dans la direction Ox), de largeur d selon (Oy) et d'épaisseur h selon (Oz). On admet que l'équation (*) vérifiée par le champ $\vec{B}$ reste valable.

- 20) De quelles variables d'espace dépend $\vec{B}$?
- 21) Dans l'hypothèse d'une plaque mince ($h \ll d$), on peut négliger la dépendance suivant y . Dans ce cas, écrire le champ magnétique dans la plaque. On notera à nouveau B_0 le champ magnétique à la surface $z = \pm \frac{h}{2}$.
- 22) Exprimer le vecteur densité de courant $\vec{J}$.
- 23) On montre que la puissance dissipée par effet Joule dans une portion d'épaisseur h de la plaque

se met sous la forme :

$$P_j = \alpha P_0 f(\xi)$$

où α est un coefficient positif, ξ est défini par $\xi = \frac{h}{2b}$ et $f(\xi) = \frac{\text{sh}(\xi) - \sin(\xi)}{\text{ch}(\xi) - \cos(\xi)}$

Quelle est l'unité de α ?

24) On donne l'allure de la fonction f sur la courbe suivante :

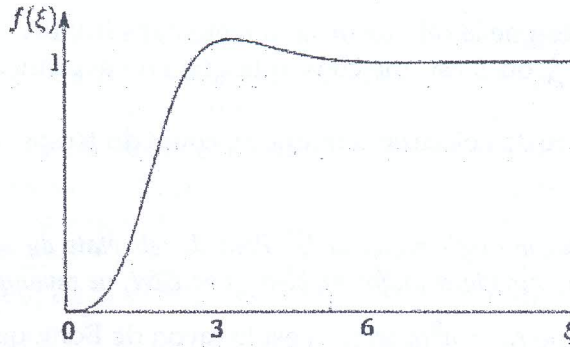


Figure 6 : La courbe de $f(\xi)$

En s'aidant de la figure, déterminer quelle est la meilleure fréquence de travail pour maximiser la puissance dissipée par effet Joule dans la plaque. Cette valeur vous paraît-elle raisonnable pour une plaque d'1mm d'épaisseur faite d'acier (de perméabilité $\mu = 400\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ et de conductivité électrique $\gamma = 10^7 \text{ S.m}^{-1}$) ?

25) Quels avantages présentent cette technique de forge par rapport au technique traditionnelle ?

Problème 2 : Autour de l'atome d'hydrogène

Dans ce problème, on se propose d'étudier quelques aspects de l'atome d'hydrogène.

A - Modèle planétaire de l'atome d'hydrogène

Dans le modèle planétaire de l'atome d'hydrogène, l'électron, de masse m et de charge $-e$, (vu comme ponctuel en M) tourne autour de son proton, de charge e , (lui aussi ponctuel et supposé immobile en O) en décrivant une orbite circulaire de rayon $r = OM$ (figure 1).

L'électron est repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) comme indiqué sur la figure 1 et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est la base locale correspondante. On néglige l'interaction gravitationnelle entre l'électron et le proton.

On rappelle que : $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$. On utilisera $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 2,3 \cdot 10^{-28} \text{ J.m}$

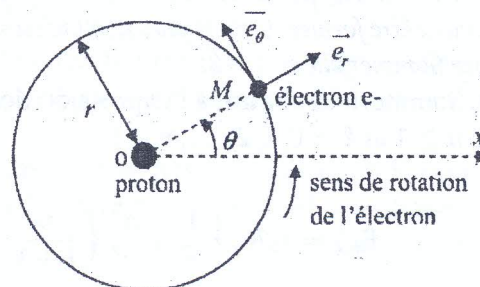


Figure 1 – Modèle planétaire de l'atome d'hydrogène

A-1 - Modèle classique

- 1) Rappeler l'expression de la force électrique exercée par le proton sur l'électron. En déduire l'énergie potentielle électrostatique E_p y associée en considérant $E_p(\infty) = 0$.
- 2) Par l'application du principe fondamental de la dynamique, déterminer le vecteur vitesse $\vec{v}$ et

déduire l'énergie cinétique E_c en fonction de e , ϵ_0 et du rayon r de l'orbite.

3) Vérifier que l'énergie totale $E = \frac{1}{2}E_p = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$

4) Exprimer la norme L du moment cinétique en O de l'électron en fonction de r , m , e et ϵ_0 .

5) D'après la loi classique du rayonnement électrique, une particule chargée et accélérée rayonne une puissance électromagnétique :

$$P_r = \frac{\omega^4 e^2 r^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

où ω est la vitesse angulaire et c désigne la célérité de la lumière dans le vide.

Mettre P_r sous la forme : $P_r = \beta \frac{1}{r^4}$ où β est une constante que l'on exprimera en fonction des paramètres du problème.

Justifier que le rayon de la trajectoire de l'électron diminue au cours du temps. Commenter.

A-2 - Postulats de Bohr

En 1913, Bohr a postulé que L est un multiple entier de $\hbar$. Pour de tels états du modèle de Bohr, dits stationnaires, l'électron, en mouvement circulaire uniforme, bien qu'accélééré, ne rayonne pas d'énergie.

6) En utilisant $L = n\hbar$, montrer que $r_n = n^2 r_0$ avec r_0 est le rayon de Bohr, qu'on exprimera en fonction de m , e , ϵ_0 et $\hbar$.

7) En déduire que l'énergie mécanique de l'électron vaut : $E_n = -\frac{\mathcal{R}_y}{n^2}$

8) Calculer la valeur de r_0 en picomètres et celle de E_1 en électron-volts.

9) Soit v_1 la norme de la vitesse dans l'état $n = 1$. Calculer le rapport $\alpha = \frac{v_1}{c}$. Commenter.

A-3 - Spectre de raies de l'hydrogène

On rappelle que l'émission de lumière par un atome est due aux transitions entre deux états atomiques d'énergie $E_{n'}$ vers un état d'énergie plus faible E_n .

10) Montrer que la longueur d'onde $\lambda_{n' \rightarrow n}$ de la raie d'émission correspondant à la transition de l'état d'énergie $E_{n'}$ vers l'état E_n (avec $n < n'$) vérifie la relation de Ritz:

$$\frac{1}{\lambda_{n' \rightarrow n}} = \frac{\mathcal{R}_y}{hc} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

11) Calculer la longueur d'onde $\lambda_{3 \rightarrow 2}$ de la raie H_α . À quel domaine du spectre électromagnétique appartient-elle ?

A-4- Corrections de Sommerfeld (1916)

Le modèle de Bohr fut un premier succès dans la prévision du spectre d'émission de l'hydrogène. Mais c'était insuffisant. Par exemple, de la raie H_α qui fut observée comme un doublet par Michelson et Morley dès 1887, mais qui, plus tard, se révéla être formée de raies plus nombreuses. La première explication théorique de ces multiplets a été fournie par Sommerfeld en 1916.

Au terme de son calcul, Sommerfeld aboutit à l'expression des niveaux d'énergie $E_{n,\ell}$, indiqués par deux entiers (n, ℓ) avec $n \geq 1$ et $\ell = 0, 1, 2, \dots, n-1$:

$$E_{n,\ell} = -\mathcal{R}_y \left[\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha^2}{n^2} \left(\frac{n}{\ell+1} - \frac{3}{4} \right) \right]$$

où α est la constante de structure fine introduite à la question 8).

12) Commenter la formule de Sommerfeld en liaison avec la formule de Bohr et la faible valeur de α .

13) Combien de sous-niveaux d'énergie ce calcul prévoit-il pour les niveaux $n = 2$ et $n = 3$ de la formule de Bohr ?

14) En déduire, en fonction de $\mathcal{R}_y$ et α , l'expression de l'écart $\Delta E_f = E_{2,1} - E_{2,0}$ entre les deux sous-niveaux $n = 2$. Calculer sa valeur en eV.

15) Comparer alors les probabilités d'occupation des niveaux $E_{2,1}$ et $E_{2,0}$ à la température $T = 288$ K.

B- Résolution interférométrique d'un doublet spectral

B-1- L'interféromètre de Michelson

On considère un interféromètre de Michelson (figure 2) constitué de deux miroirs et d'une lame séparatrice (S_p) idéale, c'est-à-dire infiniment mince n'introduisant aucun déphasage et de coefficient de réflexion énergétique vaut 0,5. Les miroirs (M_1) mobile et (M_2) fixe sont perpendiculaires. On pose $OM_2 = \ell_0$ et $OM_1 = \ell_0 + d$. L'interféromètre est éclairé par une source étendue supposée monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0 = 656 \text{ nm}$. On observe la figure d'interférence sur un écran situé dans le plan focal image d'une lentille mince convergente de focale $f' = 1 \text{ m}$ et d'axe ($y'y$). L'ensemble est placé dans l'air, dont l'indice est pris égal à 1.

16) Quel est le rôle de la lame (S_p)? Quel est le rôle de celui de la lentille ?

17) Le montage est équivalent à une lame d'air d'épaisseur d . Montrer que la différence des chemins optiques pour un rayon entrant avec une faible inclinaison i est donnée par $\delta = 2d \cos(i)$.

18) Indiquer la forme et l'appellation des franges d'interférences observées sur l'écran.

19) On mesure $d = 0,5 \text{ mm}$. Calculer le rayon du premier anneau sombre à partir du centre.

20) La largeur de la source intervient-elle sur le contraste des anneaux ? Que détermine-t-elle ?

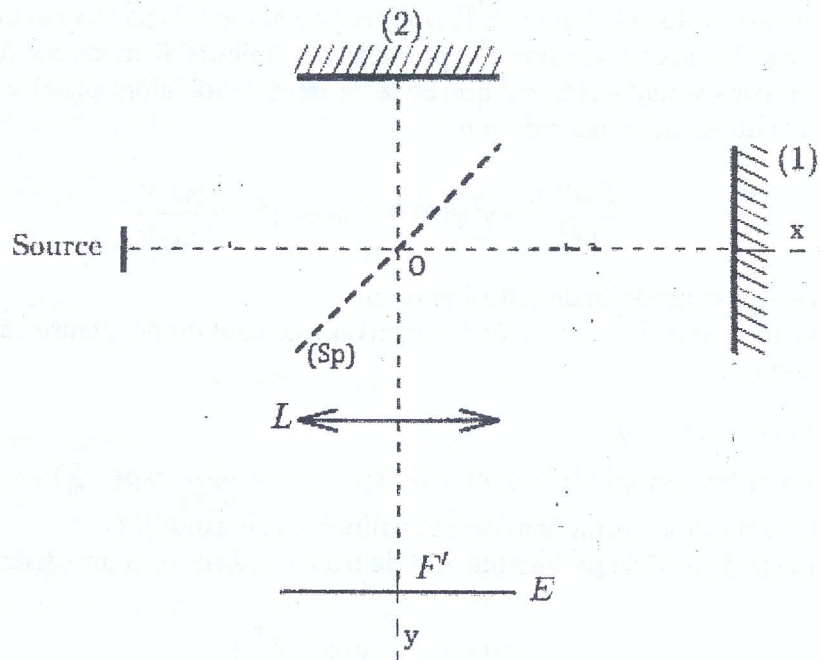


Figure 2

B-2- Résolution de l'écart spectral

On étudie le cas où la source de lumière utilisée présente un doublet spectral de nombres d'ondes σ_1 et σ_2 obtenue par désexcitation depuis le niveau ($n = 3, \ell = 1$) vers les niveaux ($n = 2, \ell = 0$) et ($n = 2, \ell = 1$) respectivement.

21) Donner l'expression des ordres d'interférence p_1 et p_2 en F' pour chaque radiation du doublet.

22) Pour quelles valeurs de la différence $p_1 - p_2$ y-a-t-il brouillage en F' ?

En pratique la totalité de la figure d'interférences est affectée et on perd la visibilité des franges partout sur l'écran.

23) En déduire, en fonction de l'écart spectral $\Delta\sigma$ la variation D_δ de la différence de marche entre deux situations consécutives de brouillage.

24) Application numérique : dans le cas du doublet H_α , la variation de l'épaisseur de la lame d'air pour passer d'une situation de brouillage à la situation de brouillage directement consécutive vaut $0,695 \text{ cm}$. Déterminer, en cm^{-1} , l'écart spectral $\Delta\sigma$.

C- Approche quantique

Dans cette partie, on considère l'électron de l'atome d'hydrogène placé dans l'énergie potentielle $E_p(r)$ définie plus haut. Son état quantique est caractérisé par une fonction d'onde $\psi(M, t)$ solution de l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(M, t) + E_p(r)\psi(M, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(M, t)$$

On note $\psi(M, t) = \varphi(M)e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$ la fonction d'onde stationnaire de la particule.

25) Quelle est la signification physique de $|\psi(M, t)|^2$?

26) Montrer que $\varphi(M)$ vérifie l'équation de Schrödinger indépendante du temps :

$$\Delta\varphi(M) + \frac{2m}{\hbar^2}(E - E_p(r))\varphi(M) = 0$$

C-1- Une résolution simplifiée de l'atome de Bohr par l'équation de Schrödinger

Les points M où est évaluée la fonction d'onde sont ainsi repérés par leurs coordonnées polaires ($r = R, \theta$), d'axe Oz, avec r contraint à prendre des valeurs R discrètes (que l'on cherche à déterminer). Par conséquent φ dépend que de la variable θ . Soit alors $\varphi(M) = \varphi(r = R, \theta)$.

27) En utilisant la question 3) montrer que

$$\frac{d^2\varphi(\theta)}{d\theta^2} + \eta^2\varphi(\theta) = 0 \text{ avec } \eta^2 = \frac{me^2R}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}$$

28) Donner la solution générale de cette équation.

29) En remarquant que $\varphi(\theta) = \varphi(\theta + 2\pi)$, retrouver une relation de quantification des valeurs de R , puis des énergies E .

C-2- L'orbite 1s ($n = 1, \ell = 0$)

Dans cette orbite sphérique $\varphi(M) = \varphi(r) = \beta \exp(-\frac{r}{r_0}) = \frac{1}{\sqrt{\pi r_0^3}} \exp(-\frac{r}{r_0})$

30) Quelle est la condition permettant de déterminer la constante β ?

31) Montrer que la densité de probabilité $\rho(r)$ de trouver l'électron à une distance r du noyau est:

$$\rho(r) = 4 \frac{r^2}{r_0^3} \exp(-2\frac{r}{r_0})$$

32) Un calcul non demandé montre que la valeur moyenne $\langle r \rangle = \frac{3}{2}r_0$. En vous appuyant sur la figure 3, expliquer pourquoi cette distance est différente du maximum de $\rho(r)$.

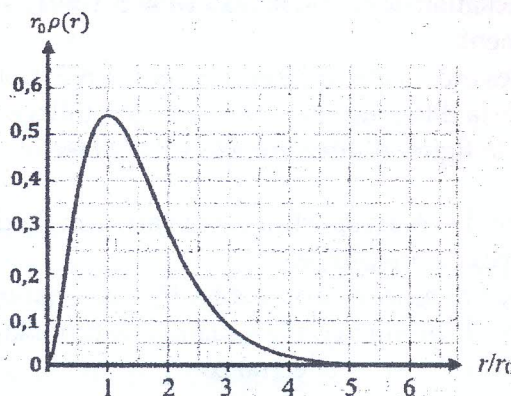


Figure 3