



Examen d'Algèbre - Semestre N°1
Sections : P.C.2 et P.T.2

Durée : 2h

Date : 12 Décembre 2025

Nombre de pages : 3

☞ Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation.

Exercice / (5 pts)

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; on note v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A .

1. Calculer le polynôme caractéristique χ_A de la matrice A et on déduit que A possède une seule valeur propre λ à préciser.
2. Déterminer $\text{Ker}(v - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}^3})$, le sous espace propre de v associé à la valeur propre λ .
3. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Est-elle trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Justifier.
4. On considère l'endomorphisme $u = v - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3}$ et on pose $e_1 = (1, 0, 0)$.
 - (a) Montrer que l'endomorphisme u est nilpotent.
 - (b) Déterminer $\text{Ker}(u^2)$ puis vérifier que $e_1 \notin \text{Ker}(u^2)$.
 - (c) Montrer que la famille $\mathfrak{B} = (u^2(e_1), u(e_1), e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
 - (d) Ecrire T la matrice de v dans la base $\mathfrak{B}$, puis exprimer la matrice A en fonction de T .
5. On définit l'exponentielle d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} M^k.$$

Calculer $\exp(N)$, avec $N = T - 2I_3$.

Problème / (15 pts)

On considère un entier $n \geq 2$ et on note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$ et $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note également $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) le sous-espace vectoriel des matrices symétriques, (respectivement anti-symétriques). On considère $F = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des formes linéaires sur E .

Partie 1/

1. Soit $\varphi : E \rightarrow E$ l'application linéaire définie par : $A \mapsto {}^t A$.
 - (a) Vérifier que φ est une symétrie de E .
 - (b) Déduire les valeurs et les sous espaces propres de φ .
 - (c) Justifier que l'endomorphisme φ est diagonalisable.
2. On note par $g : E \rightarrow F$, l'application qui, à toute matrice $M \in E$, associe la forme linéaire $g(M)$ de E définie par :

$$\forall A \in E; \quad g(M)(A) = \text{Tr}(MA).$$

où Tr désigne la forme linéaire trace.

- (a) Montrer que g est linéaire.
- (b) Montrer que, $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $g(M)(E_{ij}) = m_{ji}$ où $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- (c) Déduire que g est injective.
- (d) Justifier que g est un isomorphisme de E sur F .

Partie 2/

On considère un élément non nul u de F et on définit l'endomorphisme ψ de E :

$$\psi : E \rightarrow E, \quad A \mapsto \psi(A) = u(A).I_n.$$

1. (a) Justifier qu'il existe une unique $M \in E$ telle que $\forall A \in E; \psi(A) = \text{Tr}(MA).I_n$.
- (b) Déterminer $\text{Im}(\psi)$, puis déduire que $\text{Ker}(\psi)$ est un hyperplan de E .
- (c) Vérifier que : $\psi \circ \psi = \text{Tr}(M).\psi$.
- (d) Montrer que : $\text{Ker}(\psi) \cap \text{Im}(\psi) \neq \{0\}$ si et seulement si $\text{Tr}(M) = 0$.
- (e) En déduire que ψ est diagonalisable si et seulement si $\text{Tr}(M) \neq 0$.

3. Dans cette question, on suppose que $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que $\text{Tr}(M) \neq 0$.

(a) i. Montrer que pour tout $A \in E$, on a $(\frac{A - {}^t A}{2}) \in \text{Ker}(\psi)$.

ii. Déduire que $E = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \text{Ker}(\psi)$.

(b) i. Calculer $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \text{Ker}(\psi))$.

ii. Vérifier que $I_n \notin \text{Ker}(\psi)$.

iii. Montrer que

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \text{Vect}(I_n) \oplus [\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \text{Ker}(\psi)].$$

(c) Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \text{Ker}(\psi) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

(d) En déduire que $E = \text{Vect}(I_n) \oplus [\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \text{Ker}(\psi)] \oplus [\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \text{Ker}(\psi)]$.

4. On considère l'endomorphisme $f = \varphi + \psi$.

(a) Montrer que $\text{sp}(f) = \{1 + \text{Tr}(M), 1, -1\}$.

(b) Trouver les sous espaces propres associés.

(c) En déduire que f est diagonalisable.