

Devoir de contrôle du 1^{ème} semestre en Analyse

Date: 28/10/2025 _____ Durée: 1h30min _____ Nombre de pages: 2

Exercice.

On considère l'application

$$N : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad P \longmapsto N(P) = \int_0^{+\infty} |P(t)| e^{-t} dt.$$

1. Montrer que N définit bien une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $P_n(t) = t^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $N(P_n) = n!$.

Problème.

Partie I.

1. Soit $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par, $\gamma_n = -\ln(n) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer $\gamma_n - \gamma_{n-1} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

(b) En déduire que $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. On note γ sa limite.

2. Montrer que $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)$ est convergente de somme γ .

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right)$.

3. Justifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$ et montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \leq \frac{1}{k}$.
4. On admet que $r_n \sim \frac{1}{2n}$. Etudier la nature des séries suivantes:

(a) $\sum_{n \geq 1} r_n$

(b) $\sum_{n \geq 2} \frac{r_n}{\ln(n)}$

(c) $\sum_{n \geq 1} (-1)^n r_n$

Partie II.

5. Soit $x > 0$. Justifier l'existence de l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$. On pose alors,

$$R(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

6. Montrer que R est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et calculer $R'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

7. Soit α et β deux réels strictement positifs.

(a) Montrer que la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} dt$. On pose alors,

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} dt.$$

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer respectivement que,

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t}}{t} dt = R(\alpha\varepsilon) \quad \text{et} \quad \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} dt = \int_{\alpha\varepsilon}^{\beta\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

(c) A l'aide d'un encadrement, montrer que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\alpha\varepsilon}^{\beta\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u} du = \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$. En déduire la valeur de $I(\alpha, \beta)$.

Partie III.

On désigne par φ la fonction définie sur $[0, 1[$ par

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} + \frac{1}{\ln(1-t)} & \text{si } t \in]0, 1[\\ \frac{1}{2} & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

8. Montrer que φ est continue sur $[0, 1[$.

9. Montrer que $\int_0^1 \varphi(t) dt$ converge. On note $J = \int_0^1 \varphi(t) dt$.

10. En effectuant le changement de variable $u = -\ln(1-t)$. Montrer que

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1-e^{-u}} h(u) du, \quad \text{où } h(u) = 1 - \frac{1-e^{-u}}{u}.$$

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\Psi_n :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto h(t) e^{-nt}.$$

(a) Montrer que Ψ_n est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que,

$$\int_0^{+\infty} \Psi_n(t) dt = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

(on pourra utiliser Qu.7.c)

(b) Montrer que

$$\sum_{k=1}^n \Psi_k(t) - \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} h(t) = \frac{h(t)}{1-e^{-t}} e^{-(n+1)t}.$$

(c) En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \Psi_k(t) - \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} h(t) \right) dt = 0$$

12. Conclure que $J = \gamma$.

Fin de l'épreuve