

Examen 1 d'analyse.

Exercice.

Soit $p \geq 2$ un entier naturel. On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre p , muni d'une norme $\|\cdot\|$, vérifiant la propriété suivante:

$$\|CD\| \leq \|C\| \|D\| \quad \text{pour tous } C, D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}).$$

1. Montrer que si $\|D\| < 1$ alors la suite $(D^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.
2. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ (C, D) &\longmapsto C.D \end{aligned}$$

est continue.

Dans toute la suite, on considère une matrice A d'ordre p dont la suite des puissances $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice B .

3. Montrer que B est un projecteur. En déduire que $Sp(B) \subset \{0, 1\}$.
4. Soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$.
 - (a) Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$, $X^t X$ est une matrice non nulle d'ordre p . En déduire que,

$$|\lambda| \leq \|A\|.$$

- (b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\lambda|^n \leq \|A^n\|.$$

5. Prouver que:

$$Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \overline{D}(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| \leq 1\}.$$

Problème.

On se propose d'étudier, suivant les valeurs du paramètre α la fonction S_α définie par $S_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^\alpha}$.

Partie I: cas générale $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{-nx}}{n^\alpha}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Établir que S_α définit une fonction continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Étudier la limite en $+\infty$ de S_α .

Partie II: Un cas particulier $\alpha = \pm \frac{1}{2}$.

Afin d'alléger les notations, on pose dans toute la suite:

$$f(x) := S_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad g(x) := S_{-\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} e^{-nx}.$$

1. Etudier la convergence normale de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis sur tout intervalle de type $[a, \infty[$ où $a > 0$.
2. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$?
3. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.
4. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $f'(x) = -g(x)$.
5. (a) Montrer que pour tout $x > 0$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du.$$

- (b) A l'aide d'un changement de variable montrer que,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du = \sqrt{\frac{\pi}{x}}.$$

On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

- (c) En déduire un équivalent simple de f au voisinage de 0.

6. On pose $u_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \right) - 2\sqrt{n}$.

- (a) En étudiant la nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_{n+1} - u_n$, montrer que la suite (u_n) est convergente.

- (b) En déduire qu'il existe $M > 0$ tel que,

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} u_n e^{-nx} \right| \leq M \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}.$$

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par, $h(x) = \frac{f(x)}{1 - e^{-x}} \tilde{e}^x$

7. Donner un équivalent simple de h en 0^+ .
8. En utilisant le produit de Cauchy de deux séries, montrer que pour tout $x > 0$,

$$h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \right) e^{-nx}.$$

9. Montrer que pour tout $x > 0$,

$$2g(x) = h(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n e^{-nx}.$$

10. En déduire que $g(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{\frac{3}{2}}}$.

Partie III. cas $\alpha = 1$ sur une partie de $\mathbb{C}$.

1. Déterminer l'ensemble des $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$ tels que

$$|1 - te^{ix}| = 0.$$

2. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $0 < a < b < \pi$ et $x \in [a, b]$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$|1 - te^{ix}| \geq m.$$

3. En déduire que pour tout $x \in]0, \pi[$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{|1 - te^{ix}|} dt = 0.$$

4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $x \in]0, \pi[$ et tout $t \in [0, 1]$, on a

$$\sum_{n=1}^N t^{n-1} e^{inx} = e^{ix} \frac{1 - t^N e^{iNx}}{1 - te^{ix}}.$$

5. En déduire que pour tout $x \in]0, \pi[$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{inx}}{n}$ converge et que l'on a,

$$S_1(-ix) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n} = \int_0^1 \frac{e^{ix}}{1 - te^{ix}} dt.$$
