

Devoir de Contrôle de Physique 1

Durée : 2 H

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.

Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré. Si, au cours de l'épreuve, un étudiant repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'épreuve comporte deux problèmes indépendants.

Données :

- * La célérité de la lumière dans le vide $c = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
- * En coordonnées cylindriques : $\Delta f(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
- * $\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

Problème 1

Les parties I et II sont indépendantes.

- 1- Rappeler les équations de Maxwell ainsi que leur signification physique.
- 2- Établir l'équation de Poisson.

I- Bilan d'énergie dans un condensateur.

On considère un condensateur plan d'axe (Oz) formé de deux armatures métalliques circulaires notées A_1 et A_2 , de rayon R , situées en $z = -a$ et $z = a$ (figure 1). On suppose $a \ll R$, de façon à négliger les effets de bords. On admet que le champ électrique est nul à l'intérieur du métal. L'armature A_1 porte une charge $q(t)$ supposée de variation suffisamment lente pour admettre que le champ électrique $\vec{E}$ dans l'espace vide, entre les armatures, s'identifie à $E_0(t)\vec{u}_z$.

- 3- Justifier que $q(t)$ est surfacique. Montrer que $E_0(t) = \frac{q(t)}{\pi \epsilon_0 R^2}$.

On désigne par $\vec{B}_1(M, t)$ le champ magnétique créé par les variations dans le temps de $\vec{E}$ en un point $M(r, \theta, z)$ situé entre les armatures.

- 4- Justifier que $\vec{B}_1(M, t) = B_1(r, t)\vec{u}_\theta$.

- 5- Montrer que $\vec{B}_1(r, t) = \frac{\mu_0 r}{2\pi R^2} \frac{dq}{dt} \vec{u}_\theta$.

- 6- Calculer le vecteur de Poynting $\vec{S}$ puis $\text{div}(\vec{S})$. Commenter.

On donne $q(t) = Q_m \sin(\omega t)$.

- 7- Calculer les densités moyennes d'énergie électrique $\langle u_e(M, t) \rangle$ et magnétique $\langle u_m(M, t) \rangle$.

- 8- Montrer que la densité d'énergie électromagnétique $u_{em}(M, t)$ peut être confondue à $u_e(M, t)$ si la pulsation $\omega \ll \omega_l$ où on exprimera ω_l en fonction de c et R . Calculer ω_l si $R = 1 \text{ cm}$.

- 9- En supposant satisfaite la condition $\omega \ll \omega_l$, vérifier l'identité de Poynting. Conclure.



Figure 1

II- Électrolyte entre les plaques d'un condensateur.

Les armatures d'un condensateur plan sont portées au potentiel $U = V(a) \geq 0$ et $-U = V(-a)$. On note $V(z)$ le potentiel électrostatique en un point d'abscisse z .

On introduit entre les armatures un électrolyte constitué de cations et d'anions de charges individuelles respectives $+q$ et $-q$. En l'absence de champ (donc pour $U = 0$), les anions et les cations ont la même densité particulière n_0 . L'ensemble est à l'équilibre thermique à la température T . Le nombre n de particules par unité de volume qui ont l'énergie $\mathcal{E} = \pm qV$ est $n = n_0 \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{k_B T}\right)$, où k_B est la constante de Boltzmann.

10- Exprimer la densité volumique de charge $\rho(z)$ en fonction des données et de $V(z)$.

Que devient-elle si on suppose $|qV| \ll k_B T$?

Cette hypothèse étant supposée réalisée en tout point dans la suite.

11- En déduire l'équation différentielle vérifiée par la fonction $V(z)$. On introduira une longueur caractéristique δ fonction de k_B , T , ϵ_0 , n_0 et q .

12- Montrer que $V(z) = \frac{U}{\text{sh}\left(\frac{a}{\delta}\right)} \text{sh}\left(\frac{z}{\delta}\right)$.

13- En déduire le champ $\vec{E}(z)$.

14- Donner l'allure de la courbe $V(z)$ pour les cas $\delta \ll a$ et $\delta \gg a$.

15- Commenter soigneusement ces courbes.

Problème 2

I- Générateur de tension triangulaire

Le but de cette partie est de montrer la possibilité de générer des signaux carrés et triangulaires dans des montages, sans l'utilisation de générateurs. Le circuit générateur de tension en triangle est représenté en figure 1. Les trois amplificateurs sont idéaux et nommés (A1), (A2) et (A3).

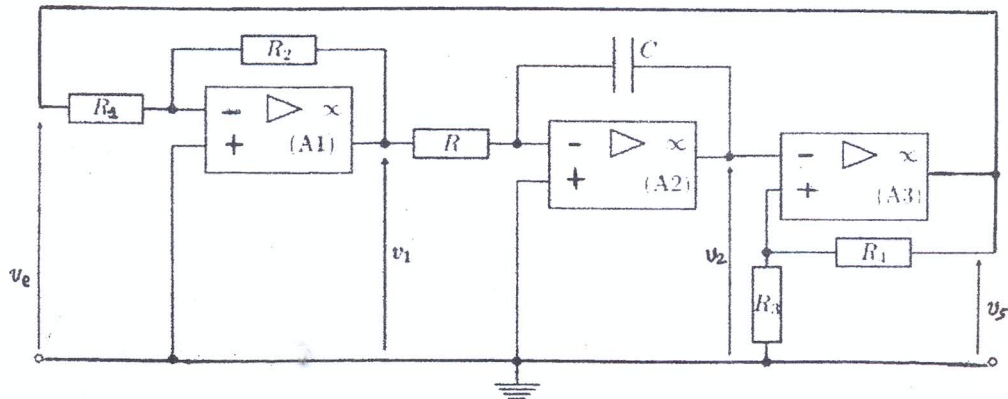


Figure 1

- On notera $+V_{sat}$ et $-V_{sat}$ les tensions de saturation haute et basse des amplificateurs.
- (A1) et (A2) fonctionnent en régime linéaire.
- (A3) fonctionne comme un comparateur :
$$v_s(t) = \begin{cases} +V_{sat} = 15V & \text{si } v^+ > v^- \\ -V_{sat} & \text{si } v^+ < v^- \end{cases}$$
- On suppose que $v_2(t=0) = 0$ et $v_s(t=0) = +V_{sat}$.

1- Exprimer $v_1(t)$ en fonction de R_1, R_2 et $v_e(t)$.

2- Exprimer $v_2(t)$ en fonction de R, R_1, R_2, C et $\int v_e(t)dt$.

- 3- Montrer que $v_s(t)$ bascule de $+V_{sat}$ vers $-V_{sat}$ si $v_2(t) > V_b$ où on exprimera V_b en fonction de R_3, R_4 et V_{sat} .
- 4- Montrer que $v_2(t)$ est une tension triangulaire périodique d'amplitude $E = V_b$ et de période T que l'on exprimera en fonction des paramètres du problème.
- 5- Représenter les variations de $v_s(t)$ et $v_2(t)$ sur un même graphe.
- 6- Comment faire pour permettre à un utilisateur de modifier la fréquence et l'amplitude ?
- En fixant $R = 1k\Omega$ et en prenant $R_1 = R_2$ et $R_3 = R_4$, déterminer la valeur de C permettant d'obtenir une fréquence $f = 2kHz$.
- 7- On donne la décomposition en série de Fourier du signal $v_2(t)$:

$$v_2(t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{8E}{\pi^2 n^2} \sin(2\pi n f t)$$

Représenter le spectre de $v_2(t)$ et attribuer à chaque terme son nom et son rôle.

- 8- Le signal $v_2(t)$ est échantillonné à une fréquence $F_e = 44,1kHz$. Sachant qu'on néglige les harmoniques d'amplitude inférieure à $\frac{8E}{100\pi^2}$, le critère de Shannon est-il vérifié ? Justifier.

II- Filtrage d'une tension triangulaire.

On considère un filtre de fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}$ de fréquence $f_0 = 2kHz$ et de facteur de qualité $Q = 10$.

- 9- Déterminer le gain $G(\omega)$ et le déphasage $\phi(\omega)$. Quelle est la nature du filtre ?
- 10- Montrer que la bande passante à $-3dB$ est $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.
- 11- Tracer le diagramme de Bode en gain.
- 12- Donner l'équation différentielle qui relie les tensions d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$.
- On envoie sur ce filtre la tension triangulaire $v_2(t)$ de fréquence f et d'amplitude $E = 5V$. On donne l'allure de la tension de sortie pour deux expériences réalisées à deux fréquences différentes (figure 2).

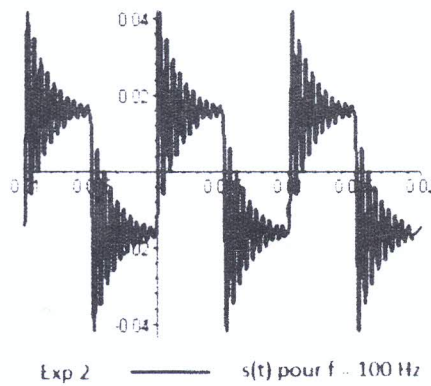
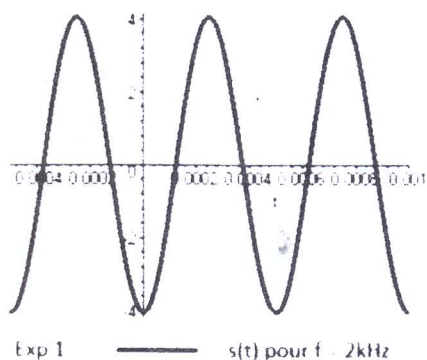


Figure 2

- 13- Déterminer le signal de sortie $s(t)$ si $f = f_0$.
- 14- Pour $f = 100Hz$, quel est en théorie le comportement du filtre pour cette fréquence ? Que serait alors le signal de sortie ? Commenter.
- 15- En considérant l'équation différentielle du filtre, interpréter la forme du signal observé.

***** Fin de l'Épreuve *****