REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session : Juin 2000

INSTITUT PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIEURS SFAX BIBLIOTHEQUE

Concours en Biologie et Géologie
Epreuve de Mathématiques

Durée : 3 H	**Date** : 5 Juin 2000	**Heure** : 8 H	**Nb pages** : 3

Barème : Ex: 4 pts; Pb 1: I : 2 pts; II : 3 pts; III : 3 pts Pb 2: I : 2 pts ; II: 2pts;III: 4 pts

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et soin de la présentation. Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

L' usage des calculatrices est strictement interdit.

EXERCICE

Soit f l'endomorphisme de IR^3 dont la matrice par rapport à la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ de IR^3 est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que f est un automorphisme de IR^3.
2) Vérifier que

$$A^3 - 6A^2 + 11A - 6I_3 = 0$$

I_3 désigne l'idendité de IR^3.
En déduire A^{-1}.
3) Soit $V_1 = e_1 + e_2 - 2e_3$. Calculer $f(V_1)$. Que peut–on conclure?
4) Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice A.
5) Déterminer en utilisant **3)** les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A.
En déduire que A est semblable à une matrice diagonale.

PROBLEME 1

Partie I

Soit R un réel positif et $D(R)$ la partie de IR^2 définie par

$$D(R) = \{(x, y) \in IR^2 \ / \ x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

1) Calculer l'intégrale double : $I(R) = \iint_{D(R)} \exp(-(x^2 + y^2))dxdy$.

2) Montrer alors que l'intégrale : $\iint_{IR^2} \exp(-(x^2 + y^2))dxdy = \pi$.

3) En déduire que l'intégrale : $\int_{IR} \exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}$.

Partie II

On considère le couple de variables aléatoires X et Y dont la densité de probabilité est donnée par la fonction f(x,y) définie sur IR^2 par :

$$f(x,y) = \exp(-(\alpha x^2 + \beta y^2)),$$

où α et β sont des réels stictement positifs.

1) Montrer que les réels α et β vérifient la relation : $\alpha\beta = \pi^2$.
2) Calculer l'espérance mathématique E(XY) du couple (X, Y).
3) Déterminer les densités marginales $f_X(x)$ et $f_Y(y)$ des variables aléatoires X et Y.
4) Calculer E(X), E(Y), V(X),V(Y), Que peut-on dire des deux variables aléatoires X et Y?

Partie III

Dans cette partie on prend $\alpha = \beta$, et on considère la suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires X_n de même densité que la variable aléatoire X citée dans la partie II. Pour $n \in IN^*$, on pose

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n}{n}.$$

1) Déterminer α.
2) Calculer $E(Z_n)$ et $V(Z_n)$.
3) Soit a un réel strictement positif
   a) En utilisant l'inégalité de Tcheybechev montrer que
   $$P(|Z_n - E(Z_n)| \geq a) \leq A(n)$$
   où A(n) est une fonction de n à déterminer.
   b) En déduire que $P(|Z_n - E(Z_n)| \geq a)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

PROBLEME II

Le but de ce problème est de calculer la somme de la série de terme général U_n, $n \in IN$, définie par :

$$(1) \qquad U_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos x} \, dx$$

où $\lambda \in IR$, $0 < \lambda < 1$.

Partie I

1) Montrer que U_n est bien définie.

2) **a)** Montrer que pour tout a > 0, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2+t^2}dt = \frac{\pi}{2a}.$$

b) En effectuant le changement de variables t = tg $(\frac{x}{2})$, en déduire que

$$U_0 = \frac{\pi}{1-\lambda^2}.$$

3) Montrer que

$$(1+\lambda^2)U_0 - 2\lambda U_1 = \pi$$

en déduire la valeur de U_1.

Partie II

Dans cette partie on veut établir une relation de récurrence liant les termes U_{n-1}, U_{n-2} et U_n.

1) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout x ∈ [0,π], on a :

$$\frac{\cos x}{1+\lambda^2-2\lambda\cos x} = a + \frac{b}{1+\lambda^2-2\lambda\cos x}.$$

2) Montrer que pour n ≥ 2, on a

$$U_n + U_{n-2} = 2\int_0^{\pi} \frac{\cos((n-1)x)\cos x}{1+\lambda^2-2\lambda\cos x}dx.$$

3) En déduire que pour tout n ≥ 2, on a

$$U_n + U_{n-2} = \frac{1+\lambda^2}{\lambda}U_{n-1}.$$

Partie III

Soit $E = \{ (V_n)_{n\in\mathbb{N}} \ / \ V_0 \text{ et } V_1 \text{ données};\ \forall\ n \geq 2,\ V_n + V_{n-2} = \frac{1+\lambda^2}{\lambda}V_{n-1} \}$.

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.

2) On considère la suite numérique $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $V_n = r^n$.
Montrer que si $(V_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, alors r vérifie une équation du second dégré dont les racines seront notées r_1 et r_2.

3) Montrer que les deux suites $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille libre de E.
On suppose qu'elles forment une base de E.

4) **a)** Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donnée par (1) appartient à E et qu'il existe deux réels k_1, $k_2 \in \mathbb{R}$, tels que $U_n = k_1 r_1^n + k_2 r_2^n$.

b) Calculer k_1 et k_2 et en déduire que pour tout n ∈ IN, on a

$$U_n = \frac{\pi\lambda^n}{1-\lambda^2}.$$

c) Calculer $\sum_{n\geq 0} U_n$.