REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2013

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2013

Concours Biologie et Géologie
Epreuve de Mathématiques

Date: Lundi 3 Juin 2013	**Heure :** 8 H	**Durée:** 3 heures	**Nb pages:** 5
Barème:			

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Exercice 1

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^1 \left(te^{-t}\right)^n \mathrm{d}t.$$

1. Montrer par un changement de variable que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^n \frac{s^n}{n!}e^{-s}\mathrm{d}s.$$

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer par récurrence sur n que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e^x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^t\mathrm{d}t.$$

   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1 - e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}.$$

3. On considère une suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires 2 à 2 indépendantes suivant toutes la même loi de Poisson de paramètre 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les variables aléatoires S_n et S_n^* respectivement par:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} W_k \quad \text{et} \quad S_n^* = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}.$$

   (a) Quelle est la loi de S_n?

(b) Donner l'espérance $\mathbb{E}(S_n)$ et la variance $\mathbb{V}(S_n)$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer la probabilité de $\mathbb{P}(S_n \leqslant n)$ en fonction de u_n.

(d) Justifier que, pour n assez grand, la loi de S_n^* peut être approchée par la loi normale réduite centrée $\mathcal{N}(0,1)$.

(e) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 2

On désigne par $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 (resp. des matrices colonnes à 3 lignes), à coefficients dans $\mathbb{R}$.
Pour $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (resp. $M \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$), on note ${}^tM$ la transposée de la matrice M.
On munit l'espace $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ définie par:

$$\forall U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad \|U\| = \sqrt{{}^tUU} = \sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}.$$

On considère la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et la matrice colonne $b = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

On se propose dans cet exercice, d'étudier le système linéaire suivant:

$$AX = b \tag{1}$$

d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1. (a) Montrer que la matrice A est inversible, puis déterminer son inverse A^{-1}.

   (b) Montrer que le système (1) admet une solution unique c que l'on déterminera.

2. (a) Montrer que le système (1) est équivalent à

$$X = BX + d, \tag{2}$$

   avec d une matrice colonne de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ que l'on déterminera et la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

   (b) Justifier que la matrice B est diagonalisable.

   (c) On considère les trois matrices colonnes suivantes:

$$V_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

i. Calculer BV_i, pour $i \in \{1,2,3\}$.

ii. En déduire les éléments propres de B.

(d) Soit P la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont V_1, V_2 et V_3 (dans cet ordre). Calculer ${}^tPP$, puis déduire que P est inversible et donner P^{-1}, ainsi que la matrice $D = {}^tPBP$.

On définit la suite $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ par $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la relation de récurrence:

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad X_{p+1} = BX_p + d, \quad \text{où } X_p = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix}.$$

On pose $\delta_p = X_p - c$, où c est l'unique solution du système (1).

3. (a) En utilisant le fait que c vérifie $c = Bc + d$, montrer que:

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \delta_{p+1} = B\delta_p.$$

(b) Soit $U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer que:

$$\|PU\| = \|{}^tPU\| = \|U\| \quad \text{et} \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad \|D^pU\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2^p}}\|U\|.$$

(c) Calculer $\|\delta_0\|$, puis déduire que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \|\delta_p\| \leqslant \sqrt{\frac{13}{2^p}}.$$

(d) Prouver alors les trois inégalités :

$$|x_p - 1| \leqslant \sqrt{\frac{13}{2^p}}, \quad |y_p + 1| \leqslant \sqrt{\frac{13}{2^p}} \quad \text{et} \quad |z_p - 2| \leqslant \sqrt{\frac{13}{2^p}}.$$

(e) Quelles sont les limites respectives des suites $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$, $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(z_p)_{p\in\mathbb{N}}$?

Problème

On rappelle qu'à toute variable aléatoire réelle X à densité, on associe la fonction génératrice des moments, de la variable réelle u, définie par:

$$G_X(u) = \mathbb{E}(e^{uX}).$$

On admet que si cette fonction est définie dans un voisinage de 0, alors X admet des moments de tout ordre $n \in \mathbb{N}$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(X^n) = G_X^{(n)}(0).$$

Partie I

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}.$$

1. Justifier que φ définit bien une densité de probabilité d'une variable aléatoire N dont on précisera la loi.

2. Montrer que
$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ax-x^2} \mathrm{d}x = e^{\frac{a^2}{4}}.$$

3. Donner l'expression de la fonction génératrice G_N de la variable N, ainsi que son développement en série entière.

4. En déduire que la variable aléatoire N admet des moments de tout ordre $n \in \mathbb{N}$ et donner l'expression de $\mathbb{E}(N^n)$ en fonction de n.

Partie II

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même densité de probabilité φ. On considère la variable Π définie par:
$$\Pi = XY.$$

1. Déterminer la densité conjointe $f_{(X,Y)}$ du couple (X, Y).

   On admet que Π est une variable aléatoire réelle à densité.

2. Montrer que la variable aléatoire Π admet une fonction génératrice des moments donnée par :
$$\forall |u| < 2, \quad G_\Pi(u) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{uxy} f_{(X,Y)}(x,y) dx dy = \frac{2}{\sqrt{4-u^2}}.$$

3. On rappelle que la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$ et
$$\forall |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n \geqslant 1} \frac{\alpha \times (\alpha - 1) \times \cdots \times (\alpha - n + 1)}{n!} x^n.$$

   Montrer que la fonction G_Π est développable en série entière sur $]-2, 2[$ et que:
$$\forall |u| < 2, \quad G_\Pi(u) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(2n)!}{(4^n n!)^2} u^{2n}.$$

4. Montrer, de deux manières différentes, que la variable aléatoire Π admet des moments de tout ordre $n \in \mathbb{N}$ et donner l'expression de $\mathbb{E}(\Pi^n)$ en fonction de n.

Partie III

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même densité de probabilité φ. On considère la variable T définie par:
$$T = X^2 + Y^2.$$

A- Loi exponentielle

Pour $t > 0$, on définit le disque ouvert de $\mathbb{R}^2$ de centre 0 et de rayon $\sqrt{t}$ par:
$$\mathcal{D}_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \ x^2 + y^2 < t\}.$$

Soit F_T la fonction de répartition de la variable aléatoire T.

1. Justifier que:
$$\forall t > 0, \quad F_T(t) = \mathbb{P}((X,Y) \in \mathcal{D}_t).$$

2. Déterminer l'expression de la fonction F_T.

3. En déduire que la variable aléatoire T suit la loi exponentielle de paramètre 1.

B- Loi partie entière de loi exponenteille

1. On désigne par L la partie entière "supérieure" de T, c'est-à-dire, L est la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad L = n \iff n-1 < T \leqslant n.$$
   (a) Démontrer que L suit la loi géométrique de paramètre $p = 1 - e^{-1}$.
   (b) Donner son espérance et sa variance.

2. On considère la variable aléatoire $\Delta = L - T$.
   (a) Déterminer sa fonction de répartition F_Δ.
   (b) En déduire que Δ est une variable aléatoire à densité dont la densité est
$$f_\Delta(t) = \begin{cases} \dfrac{e^t}{e-1} & \text{si } t \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

C- Loi maximum des lois exponentielles

Le fonctionnement d'une machine est perturbé par des pannes. On considère les variables aléatoires T_1, T_2 et T_3 définies par:

- T_1 est le temps, exprimé en heures, écoulé entre la mise en route de la machine et la $1^{ère}$ panne.
- T_2 (resp. T_3), est le temps, en heures, écoulé entre la remise en route de la machine après la $1^{ère}$ (resp. la $2^{ème}$) panne et la panne suivante.

On suppose que les variables aléatoires T_1, T_2 et T_3 sont indépendantes et suivent la même loi que la variable T.
Soit M la variable aléatoire égale à la plus grande des 3 durées de fonctionnement de la machine sans interruption, c'est-à-dire, $M = \max(T_1, T_2, T_3)$.

1. Quelle est la durée moyenne de fonctionnement entre deux pannes consécutives?

2. (a) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(M < t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire que M est une variable aléatoire à densité f_M définie par:
$$f_M(t) = \begin{cases} 3e^{-t}\left(1-e^{-t}\right)^2 & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0. \end{cases}$$

3. (a) Montrer que
$$\forall a > 0, \quad \int_0^{+\infty} t e^{-at} dt = \frac{1}{a^2}.$$
   (b) Démontrer que la variable aléatoire M admet une espérance, dont on calculera la valeur.