Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2013

Concours Biologie et Géologie
Correction de l'Epreuve de Mathématiques

Exercice 1

On considère la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et la matrice colonne $b = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$.
On se propose dans cet exercice, d'étudier l'équation linéaire suivante:

$$AX = b \tag{1}$$

d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1. (a) On a $\det(A) = 4$. Comme $\det(A) \neq 0$, A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t Com\,(A) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Comme $\det(A) \neq 0$, (1) est un système de Cramer. Par la suite, (1) admet une solution unique c .

$$AX = b \Longleftrightarrow X = A^{-1} \cdot b.$$

Soit $c = A^{-1} \cdot b = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. (a) Pour $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a

$$X - BX = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2x - y \\ 2y - x - z \\ 2z - y \end{pmatrix}.$$

On en déduit que l'équation (1) est équivalente à

$$X = BX + d, \qquad \text{avec } d = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

(b) La matrice B est une matrice symétrique réelle donc elle est diagonalisable.

(e) Soit $p \in \mathbb{N}$. Comme $D = P^{-1}BP$, alors $B = PDP^{-1}$ et $B^p = PD^pP^{-1}$. Soit

$$B^p = PD^pP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^p & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^p + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^p & \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^p - \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^p & \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^p + \left(\cdots\right. \\ \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^p - \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^p & 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^p + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^p & \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^p - \sqrt{2}\left(\cdots\right. \\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^p + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^p & \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^p - \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^p & \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^p + \left(\cdots\right. \end{pmatrix}$$

On définit la suite $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ par $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la relation de récurrence:

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad X_{p+1} = BX_p + d, \quad \text{où } X_p = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix}.$$

On pose $\delta_p = X_p - c$.

3. (a) Soit $p \in \mathbb{N}$. En faisant la différence des deux équations $X_{p+1} = BX_p + d$ et $c = Bc + d$ membre à memþre, on obtient le résultat $\delta_{p+1} = B\delta_p$.

(b) Soit $U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a:

- $\|PU\|^2 = {}^t(PU)PU = {}^tU{}^tPPU = {}^tUU = \|U\|^2$;

L'égalité des carrés entraine l'égalité des normes car ce sont des réels positifs.

- $\|{}^tPU\|^2 = {}^t({}^tPU){}^tPU = {}^tUP{}^tPU = {}^tUU = \|U\|^2$;
- Pour $p \in \mathbb{N}$,

$$D^pU = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^p & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^p \\ c\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^p \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \|D^pU\|^2 &= b^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2p} + c^2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2p} = b^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2p} + c^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2p} \\ &= \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^p (b^2+c^2)\right]^2 \le \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^p \|U\|\right]^2. \end{aligned}$$

(c) Un calcul simple donne:

- $Bc_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot c_1;$

- $Bc_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot c_2;$

- $Bc_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot c_3.$

Les trois matrices colonnes c_1, c_2 et c_3 sont des vecteurs propres de B associés respectivement aux valeurs propres 0, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Soit $\mathrm{Sp}(B) = \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

(d) On a

$$ {}^tPP = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3. $$

Comme ${}^tPP = P{}^tP = I_3$, alors P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$.

Les colonnes de P sont des vecteurs propres de B associés aux valeurs propres 0, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, ce qui affirme que $D = P^{-1}BP = {}^tPBP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

(c) On a: $\delta_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, donc $\|\delta_0\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

Soit $p \in \mathbb{N}$. On a: $\delta_p = B^p \delta_0 = \left(PD^{p t}P\right)\delta_0 = P \cdot \left(D^{p t}P\delta_0\right)$. D'aprés ce qui précède

$$\|\delta_p\| = \left\|P \cdot \left(D^{p t}P\delta_0\right)\right\| = \left\|D^p \cdot \left({}^tP\delta_0\right)\right\| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^p \left\|{}^tP\delta_0\right\| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^p \|\delta_0\|.$$

Comme $\|\delta_0\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$, alors

$$\|\delta_p\| \leq \sqrt{\frac{13}{2^p}}.$$

(d) Pour $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a $\begin{cases} |a| \leq \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \|U\| \\ |b| \leq \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \|U\| \\ |c| \leq \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \|U\| \end{cases}$.

Comme $\delta_p = \begin{pmatrix} x_p - 1 \\ y_p + 1 \\ z_p - 2 \end{pmatrix}$, par transitivité, la relation $\|\delta_p\| \leq \sqrt{\frac{13}{2^p}}$ donne: $\forall p \in \mathbb{N}$,

$$|x_p - 1| \leq \sqrt{\frac{13}{2^p}}, \quad |y_p + 1| \leq \sqrt{\frac{13}{2^p}} \quad \text{et} \quad |z_p - 2| \leq \sqrt{\frac{13}{2^p}}.$$

Comme $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| < 1$, alors

$$\lim_{p\to+\infty} x_p = 1, \quad \lim_{p\to+\infty} y_p = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{p\to+\infty} z_p = 2.$$

Exercice 2

1. Il suffit de poser $s = nt$ dans l'expression intégrale de $u_n = \frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^1 \left(te^{-t}\right)^n \mathrm{d}t$, on obtient alors $u_n = \frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^n \left(\frac{s}{n}e^{-\frac{s}{n}}\right)^n \frac{\mathrm{d}s}{n}$, et par suite le résultat.

$$u_n = \frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^1 \left(te^{-t}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^n \frac{s^n}{n!}e^{-s}\mathrm{d}s$$

2. (a) • En $n = 0$, la propriété s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = 1 + \int_0^x e^t \mathrm{d}t.$$

Celle-ci est trivialement vraie puisque l'on a $\int_0^x e^t \mathrm{d}t = \left[e^t\right]_0^x = e^x - 1$ pour tout réel x.

• Soit n un entier tel que l'on ait

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^t \mathrm{d}t.$$

Puisque pour tout réel x les fonctions $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,x]$, on peut effectuer l'intégration par parties suivante:

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^t\mathrm{d}t &= \int_0^x \left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right)' e^t\mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}e^t\right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}e^t\mathrm{d}t \\
&= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}e^t\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

En injectant alors cette relation (que l'on vient de démontrer pour tout x réel) dans l'hypothèse de récurrence, on obtient:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}e^t\mathrm{d}t.$$

Ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et termine la démonstration.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^t\mathrm{d}t$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. En prenant $x = n$, la relation ci-dessus permet d'écrire

$$1 = e^{-n}\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} + e^{-n}\int_0^n \frac{(n-t)^n}{n!}e^t\mathrm{d}t,$$

puis

$$1 - e^{-n}\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \int_0^n \frac{(n-t)^n}{n!}e^{t-n}\mathrm{d}t.$$

Il suffit alors de poser $s = n - t$ (ce qui donne $\mathrm{d}s = -\mathrm{d}t$) dans l'intégrale ci-dessus pour obtenir le résultat.

$$u_n = \int_0^n \frac{s^n}{n!}e^{-s}\mathrm{d}s = 1 - e^{-n}\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$$

3. (a) On sait que si X, Y sont des variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ, μ, alors $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$. On en déduit alors par récurrence immédiate que S_n suit une loi de Poisson de paramètre n.

S_n suit une loi de Poisson de paramètre n.

On peut alors écrire:

$$\mathbb{P}(S_n \leq n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} S_n = k\right) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_n = k) = \sum_{k=0}^{n} e^{-n}\frac{n^k}{k!} = 1 - u_n.$$

$$\mathbb{P}(S_n \leq n) = 1 - u_n$$

(b) Posons $\overline{U}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_k$. Puisque $\mathbb{E}(U_1) = 1$ et $\sigma(U_1) = 1$, et puisque $U_1, \ldots, U_n$ sont indépendantes et de même loi, le théorème de la limite centrée assure que

$$\frac{\overline{U}_n - \mathbb{E}(U_1)}{\sigma(U_1)/\sqrt{n}} = \frac{\overline{U}_n - 1}{1/\sqrt{n}} = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$$

converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée réduite, c'est-à-dire que quels que soient les réels $a < b$:

$$\lim_{n,+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \in [a, b]\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x.$$

(T_n) converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée réduite

(c) On a:

$$\mathbb{P}(S_n \leq n) = \mathbb{P}(S_n - n \leq 0) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) = \mathbb{P}(S_n^* \leq 0)$$

On déduit alors de la question précédente la formule:

$$\mathbb{P}(S_n \leq n) \underset{n,+\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x.$$

Et comme $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est une densité de probabilité paire, on peut écrire:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

On a ainsi prouvé $\lim_{n \to +\infty} (1 - u_n) = \frac{1}{2}$, ce qui donne le résultat.

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}$$

Problème

Partie I

1. La loi normale $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ est de densité de probabilité définie sur R par: $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$.

   Donc φ est une densité de probabilité et X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, son espérance est $\mathbb{E}(X) = 0$ et sa variance est $\mathbb{V}(X) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

2. Comme X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent la même loi que X, alors la fonction $f_{(X_1,X_2)}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f_{(X_1,X_2)}(x, y) = \varphi(x)\varphi(y) = \frac{1}{\pi} e^{-x^2-y^2}$ est une densité conjointe du couple (X_1, X_2).

3. (a) Soit $a \in \mathbb{R}$. On a: $ax - x^2 = -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}$; d'où

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ax-x^2} dy = e^{\frac{a^2}{4}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2} dx.$$

En faisant $x - \frac{a}{2} = t$, on obtient:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ax-x^2} dy = e^{\frac{a^2}{4}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = e^{\frac{a^2}{4}}.$$

(b) Par définition, on a $g(u) = \mathbb{E}(e^{u\Pi}) = \mathbb{E}(e^{uX_1X_2})$. Donc

$$g(u) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{uxy} f_{(X_1,X_2)}(x,y)dxdy = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{uxy} e^{-x^2} e^{-y^2} dxdy;$$

d'où, en intégrant à x constant,

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{uxy-y^2} dy \right) e^{-x^2} dx$$

D'après la question précédente et en posant $a = ux$, on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{uxy-y^2} dy = e^{\frac{a^2}{4}} = e^{\frac{u^2x^2}{4}}.$$

Soit

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2+\frac{u^2x^2}{4}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2\left(1-\frac{u^2}{4}\right)} dx.$$

Cette dernière intégrale converge pour $1 - \frac{u^2}{4} > 0$ c'est-à-dire pour $|u| < 2$.

Dans ce cas, on peut poser $x\sqrt{1 - \frac{u^2}{4}} = s$, pour obtenir:

$$\begin{aligned} g(u) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-s^2} \frac{ds}{\sqrt{1-\frac{u^2}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{4}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-s^2} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{4-u^2}} \quad (|u| < 2). \end{aligned}$$

(c) D'après le cours, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et

$$\forall |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha \times (\alpha-1) \times \cdots \times (\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Pour tout $u \in]-2,2[$, on a

$$\frac{2}{\sqrt{4-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{2}\right)^2}} = \left(1 - \left(\frac{u}{2}\right)^2\right)^{\frac{-1}{2}}.$$

En appliquant le développement précédent, avec $x = -\left(\frac{u}{2}\right)^2$, on aura $\forall u \in]-2,2[$,

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\sqrt{4-u^2}} &= \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{\frac{-1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}-1\right)\times\cdots\times\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\left(\frac{u}{2}\right)^{2n} \\
&= \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{(-1)\times(-3)\times\cdots\times(-2n-1)}{2^n n!}\left(\frac{u}{2}\right)^{2n} \\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!}{(4^n n!)^2}u^{2n}.
\end{aligned}$$

La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-2,2[$ et sa série de Taylor $\sum_{n\geq 0}\frac{g^{(n)}}{n!}u^n$ coïncide avec la série entière $\sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!}{(4^n n!)^2}u^{2n}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(X^{2n}) = g^{(2n)} = (2n)!\frac{(2n)!}{(4^n n!)^2} = \left(\frac{(2n)!}{4^n n!}\right)^2$$

et

$$\mathbb{E}(X^{2n+1}) = g^{(2n+1)} = 0.$$

4. (a) Par définition, on a: pour $t > 0$, on note

$$F_T(t) = \mathbb{P}(T < t) = \mathbb{P}\left(X_1^2 + X_2^2 < t\right) = \mathbb{P}\left((X_1, X_2) \in \mathcal{D}_t\right).$$

(b) T est à valeurs positives, donc sa fonction de répartition F_T est nulle à gauche de 0, et pour $t > 0$,

$$\begin{aligned}
F_T(t) &= \mathbb{P}((X_1, X_2) \in \mathcal{D}_t) \\
&= \iint_{\mathcal{D}_t} f_{(X_1,X_2)}(x,y)\,dxdy = \frac{1}{\pi}\iint_{\mathcal{D}_t} e^{-(x^2+y^2)}dxdy.
\end{aligned}$$

En passant en coordonnées polaires, on obtient:

$$F_T(t) = \frac{1}{\pi}\iint_{\Delta} e^{-r^2}r\,drd\theta,$$

avec Δ le domaine $\Delta = \left\{(r,\theta),\ \ 0 < r < \sqrt{t} \text{ et } 0 < \theta < 2\pi\right\}$. Soit

$$F_T(t) = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\sqrt{t}} e^{-r^2}r\,dr\right) = 1 - e^{-t},$$

(c) En dérivant la fonction de répartition F_T de T, on obtient sa densité de probabilité:

$$f_T(t) = F_T'(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

C'est la densité de probabilité de la loi exponentielle de paramètre 1.

5. (a) Y est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. De plus, on a $Y = n \iff n-1 < X \leq n$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(Y=n) = F_X(n) - F_X(n-1) = (1-e^{-n}) - (1-e^{-(n-1)}) = (1-e^{-1})e^{-n}.$$

On en déduit que Y suit une loi géométrique de paramètre $p = 1 - 1/e$.

(b) Z est à valeurs dans $[0,1[$. Si on note F_Z sa fonction de répartition, elle est nulle à gauche de 0, et égale à 1 à droite de 1. Si $t \in [0,1[$, alors on a $Z \leq t$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n - t \leq X \leq n$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(Z \leq t) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}\{n-t \leq X \leq n\}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(n-t \leq X \leq n),$$

puisque les événements $n - t \leq X \leq n$ sont disjoints. On en déduit

$$\mathbb{P}(Z \leq t) = \sum_{n\geq 1}\left(-e^{-n} + e^{-n-t}\right) = \sum_{n \geq 1}(e^t - 1)e^{-n} = \frac{e^t-1}{e-1},$$

car on a reconnu une somme géométrique.

(c) Il suffit de dériver :

$$f_Z(t) = F_Z'(t) = \begin{cases} \dfrac{e^t}{e-1} & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

Partie II

1. La durée moyenne de fonctionnement entre deux pannes consécutives est l'espérance (commune) des variables aléatoires T_1, T_2 et T_3, c'est-à-dire $\mathbb{E}(T_1) = \mathbb{E}(T_2) = \mathbb{E}(T_3) = \dfrac{1}{1} = 1$.

2. L'événement E s'écrit : $E = (T_1 \geq 1) \cap (T_2 \geq 1) \cap (T_3 \geq 1)$. Les variables aléatoires T_1, T_2 et T_3 étant indépendantes, on a $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(T_1 \geq 1) \times \mathbb{P}(T_2 \geq 1) \times \mathbb{P}(T_3 \geq 1)$. Or,

$$\mathbb{P}(T_i \geq 1) = \int_1^{+\infty} e^{-t}dt = e^{-1}.$$

On en conclut que $\mathbb{P}(E) = e^{-3}$.

3. (a) On a $M = \max(T_1, T_2, T_3)$. Ainsi, $(M < t) = (T_1 < t) \cap (T_2 < t) \cap (T_3 < t)$. Par indépendance des 3 variables aléatoires, on en déduit que

$$\mathbb{P}(M < t) = \mathbb{P}(T_1 < t)\mathbb{P}(T_2 < t)\mathbb{P}(T_3 < t).$$

Ainsi, si $t \leq 0$, $\mathbb{P}(M \leq t) = 0$. Si $t > 0$, alors

$$\mathbb{P}(M \leq t) = \left(1 - e^{-t}\right)^3.$$

(b) La quantité calculée à la question précédente est la fonction de répartition de M, on la note F_M. Alors F_M est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}^*$. On en déduit que M admet une densité notée f_M définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f_M(t) = F_M'(t)$, soit

$$f_M(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 3e^{-t}\left(1 - e^{-t}\right)^2 & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

(c) À l'aide d'une intégration par parties, on trouve que

$$\begin{aligned}\int_0^x te^{at}dt &= \left[\frac{te^{at}}{a}\right]_0^x - \int_0^x \frac{e^{at}}{a}dt \\ &= \frac{x}{a}e^{ax} - \frac{1}{a}\left[\frac{e^{ax}}{a}\right]_0^x = \frac{x}{a}e^{ax} - \frac{e^{ax}}{a^2} + \frac{1}{a^2}.\end{aligned}$$

Faisant tendre x vers $+\infty$, on trouve finalement que

$$\int_0^{+\infty} te^{at}dt = \frac{1}{a^2}.$$

(d) On va prouver que $\int_0^x tf_M(t)$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$. Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^x tf_M(t)dt &= \int_0^x 3te^{-t}(1-e^{-t})^2dt \\ &= 3\int_0^x \left(te^{-t} - 2te^{-2t} + te^{-3t}\right)dt\end{aligned}$$

Faisant tendre x vers $+\infty$ et utilisant la question précédente, on obtient que l'intégrale $\int_0^{+\infty} tf_M(t)dt$ converge, et vaut

$$\mathbb{E}(M) = 3\left(\frac{1}{(-1)^2} - \frac{2}{(-2)^2} + \frac{1}{(-3)^2}\right) = \frac{11}{6}.$$

La durée maximale moyenne de fonctionnement entre deux pannes est 55min.