REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche Scientifique, des Technologies de l'Information et de la Communication
Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2014

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي وتكنولوجيا المعلومات و الاتصال
المناظرات الوطنية للدخول إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2014

Concours Biologie et Géologie

Épreuve de Mathématiques

Date : Lundi 2 Juin 2014	Heure : 8 H	Durée : 3 heures	Nb pages : 4

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Problème I

Partie I : Diagonalisation d'une matrice & suites récurrentes

On considère la matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$M=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}.$$

1. (a) Montrer que 2 et 4 sont les valeurs propres de M dont on précisera les multiplicités.
   (b) Déterminer les sous espaces propres de M.
   (c) En déduire que M est diagonalisable.
   (d) Soient les matrices

$$D=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

   i. Montrer que la matrice S est inversible.
   ii. Calculer S^{-1}.
   iii. Donner la relation entre M, D et S.
   iv. Pour $n\in\mathbb{N}$, montrer que

$$M^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\cdot 4^n & 4^n-2^n & 0\\ 0 & 2^{n+1} & 0\\ 0 & 4^n-2^n & 2\cdot 4^n\end{pmatrix}.$$

2. On définit les trois suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de x_0, y_0 et z_0 et les relations de récurrence suivantes : $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n + \dfrac{1}{4}y_n,\\ y_{n+1}=\dfrac{1}{2}y_n,\\ z_{n+1}=\dfrac{1}{4}y_n+z_n.\end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = \frac{1}{4^n} M^n X_0$.

(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} x_n = x_0 + & \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^n}) y_0 \\ y_n = & \frac{1}{2^n} y_0 \\ z_n = & \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^n}) y_0 & + z_0 \end{cases}$$

Partie II : Modélisation d'une évolution génétique

On présente, dans la suite, une application des probabilités à la génétique afin d'étudier la descendance par autofécondation d'une plante hétérozygote.
Pour un gène donné, une plante possède toujours deux allèles. Dans les cas les plus simples, chaque allèle est noté A ou a. On dit qu'une plante est :

- hétérozygote lorsqu'elle contient deux allèles différents, elle est alors de génotype Aa ou aA.
- homozygote lorsqu'elle contient les deux mêmes allèles, elle est alors de génotype AA ou aa.

Chaque plante reçoit au hasard et de manière indépendante un allèle de chacun de ses parents. Pour les plantes qui se reproduisent par autofécondation, tout se passe pour la descendance comme si on fécondait deux plantes de même génotype, chaque allèle étant sélectionné au hasard.
On dispose d'une plante hétérozygote à la génération 0, qui se reproduit par autofécondation d'une génération à l'autre. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les évènements

- $E_n =$ "La plante de la $n^{ième}$ génération est de génotype AA",
- $F_n =$ "La plante de la $n^{ième}$ génération est hétérozygote",
- $G_n =$ "La plante de la $n^{ième}$ génération est de génotype aa".

On note p_n, q_n et r_n les probabilités respectives des évènements E_n, F_n et G_n.
On écrira $p_n = \mathbb{P}(E_n), q_n = \mathbb{P}(F_n)$ et $r_n = \mathbb{P}(G_n)$.

1. (a) Que valent $p_0,\ q_0,\ r_0$?

   (b) Calculer $p_1,\ q_1,\ r_1$ puis $p_2,\ q_2,\ r_2$.

   (c) Montrer que $p_3 = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right)$.

2. (a) Donner les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}(E_{n+1}|E_n)$, $\mathbb{P}(E_{n+1}|F_n)$ et $\mathbb{P}(E_{n+1}|G_n)$.

   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} = p_n + \frac{1}{4} q_n$.

   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad q_{n+1} = \frac{1}{2} q_n \quad$ et $\quad r_{n+1} = \frac{1}{4} q_n + r_n$.

3. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} p_n = -\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} \\ q_n = \frac{1}{2^n} \\ r_n = -\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

(b) Que se passe-t-il à long terme pour l'évolution de la plante originelle étudiée?

Problème II

Partie A : Calcul de la dérivée d'une fonction Ψ.

1. Justifier, pour tout réel t, l'existence de l'intégrale

$$\Psi(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(xt)}{x^2+1}\mathrm{d}x.$$

2. Montrer que la fonction Ψ ainsi définie est impaire.
3. Calculer $\Psi(0)$ et $\Psi(1)$.
4. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad h(x,t) = \frac{\operatorname{arctg}(xt)}{x^2+1}.$$

(a) Déterminer la dérivée partielle $\dfrac{\partial h}{\partial t}(x,t)$.

(b) Pour t un réel strictement positif, justifier l'existence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}x.$$

5. On admet que Ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\Psi'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)(t^2x^2+1)}\mathrm{d}x.$$

(a) Calculer $\Psi'(1)$.

(b) On suppose que $t \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{x}{(x^2+1)(t^2x^2+1)} = \frac{-1}{t^2-1}\cdot\frac{x}{x^2+1} + \frac{t^2}{t^2-1}\cdot\frac{x}{t^2x^2+1}.$$

(c) En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \quad \Psi'(t) = \dfrac{\ln t}{t^2-1}$.

(d) Montrer que Ψ' est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie B : Fonction de répartition & limite de Ψ en $+\infty$.

Dans la suite, on considère deux variables aléatoires réelles X et Y, indépendantes de densité f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}.$$

On définit la variable aléatoire réelle Θ de la manière suivante :

- Si X prend la valeur 0, Θ prend aussi la valeur 0.
- Sinon, $\Theta = \dfrac{Y}{X}$.

1. Donner une densité du couple (X, Y).
2. (a) Donner la probabilité $\mathbb{P}(X = 0)$. Justifier la réponse.

   (b) On considère le système complet d'événements suivant : $\{(X > 0), (X < 0), (X = 0)\}$. En appliquant la formule des probabilités totales, montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(\Theta < t) = \mathbb{P}(Y < tX, X > 0) + \mathbb{P}(Y > tX, X < 0).$$

   (c) Montrer alors que la fonction de répartition F_Θ de Θ est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_\Theta(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}\Psi(t).$$

3. En utilisant les propriétés d'une fonction de répartition d'une variable à densité,

   (a) montrer que Ψ est croissante,

   (b) calculer la limite $\lim\limits_{t \to +\infty} \Psi(t)$.

Partie C : Calcul d'une somme.

On considère les intégrales suivantes :

$$J = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2 - 1}\mathrm{dt} \quad \text{et} \quad K = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2 - 1}\mathrm{dt}.$$

1. (a) Montrer que les intégrales J et K sont convergentes.

   (b) En utilisant la fonction Ψ, montrer que $J + K = \frac{\pi^2}{4}$.

   (c) À l'aide du changement de variable $s = \frac{1}{t}$, démontrer que $J = K$.

2. (a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $J_k = \int_0^1 t^k \ln t \mathrm{dt}$ converge.

   (b) Calculer J_k.

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} = \int_0^1 \frac{\ln t}{t^2 - 1}\mathrm{dt} - \int_0^1 \frac{t^{2n+2}\ln t}{t^2 - 1}\mathrm{dt}.$$

4. (a) Calculer la limite de $\frac{t^2 \ln t}{t^2 - 1}$ lorsque t tend vers 0, puis lorsque t tend vers 1.

   (b) En déduire qu'il existe une constante $C > 0$, telle que, $\forall t \in]0, 1[$, $\left|\frac{t^2 \ln t}{t^2 - 1}\right| \leqslant C$.

   (c) En déduire que $\left|\int_0^1 \frac{t^{2n+2}\ln t}{t^2 - 1}\mathrm{dt}\right| \leqslant \frac{C}{2n+1}$.

   (d) Montrer la relation suivante :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \int_0^1 \frac{\ln t}{t^2 - 1}\mathrm{dt}.$$

   (e) Donner alors la valeur de la somme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.