(c) En déduire que M est diagonalisable.

On a : $\dim E_2 = 1 = m_2$ et $\dim E_4 = 2 = m_4$. Donc, M est diagonalisable.

(d) Soient les matrices $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

i. Montrer que la matrice S est inversible.

On a : $\det S = -2 \neq 0$. Donc S est inversible.

ii. Calculer son inverse S^{-1}.

On a : $S^{-1} = \dfrac{1}{\det S}\, {}^t\mathrm{Com}(S)$.

La comatrice de S est donnée par :

$$\mathrm{Com}(S) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Donc $S^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

iii. Donner la relation entre M, D et S.

Les colonnes de S sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres de M (qui sont les coefficients diagonaux de D). Donc $M = SDS^{-1}$.

iv. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $M^n = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\cdot 4^n & 4^n - 2^n & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 4^n - 2^n & 2\cdot 4^n \end{pmatrix}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $M^n = SD^nS^{-1}$. Soit

$$\begin{aligned} M^n &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\cdot 4^n & 4^n & 0 \\ 0 & -2^n & 0 \\ 0 & 4^n & 2\cdot 4^n \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\cdot 4^n & 4^n - 2^n & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 4^n - 2^n & 2\cdot 4^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. On définit les trois suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de x_0, y_0 et z_0 et les relations de récurrence suivantes : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n & +\frac{1}{4}y_n, \\ y_{n+1} = & \frac{1}{2}y_n, \\ z_{n+1} = & \frac{1}{4}y_n + \quad z_n. \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = \frac{1}{4^n}M^n X_0$.

- -

Pour $n \in \mathbb{N}$, il suffit de remarquer que : $X_{n+1} = \frac{1}{4}MX_n$. Donc $X_n = \frac{1}{4^n}M^n X_0$.

(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} x_n = x_0 + & \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})y_0 & \\ y_n = & \frac{1}{2^n}y_0 & \\ z_n = & \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})y_0 & +z_0 \end{cases}$$

- -

D'après la question précédente,

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1-\frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 1-2^n & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

Donc $\begin{cases} x_n = x_0 + & \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})y_0 & \\ y_n = & \frac{1}{2^n}y_0 & \\ z_n = & \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})y_0 & +z_0 \end{cases}$

Partie II : Modélisation d'une évolution génétique.

On présente, dans la suite, une application des probabilités à la génétique afin d'étudier la descendance par autofécondation d'une plante hétérozygote.
Pour un gène donné, une plante possède toujours deux allèles. Dans les cas les plus simples, chaque allèle est noté A ou a.
On dit qu'une plante est :

- hétérozygote lorsqu'elle contient deux allèles différents, elle est alors de génotype Aa ou aA.
- homozygote lorsqu'elle contient les deux mêmes allèles, elle est alors de génotype AA ou aa.

Chaque plante reçoit au hasard et de manière indépendante un allèle de chacun de ses parents. Pour les plantes qui se reproduisent par autofécondation, tout se passe pour la descendance comme si on fécondait deux plantes de même génotype, chaque allèle étant sélectionné au hasard.
On dispose d'une plante hétérozygote à la génération 0, qui se reproduit par autofécondation d'une génération à l'autre. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les évènements

- E_n = "La plante de la $n^{ième}$ génération est de génotype AA",

- $F_n =$ "La plante de la $n^{ième}$ génération est hétérozygote",
- $G_n =$ "La plante de la $n^{ième}$ génération est de génotype aa".

On note p_n, q_n et r_n les probabilités respectives des évènements E_n, F_n et G_n.
On écrira $p_n = \mathbb{P}(E_n), q_n = \mathbb{P}(F_n)$ et $r_n = \mathbb{P}(G_n)$.

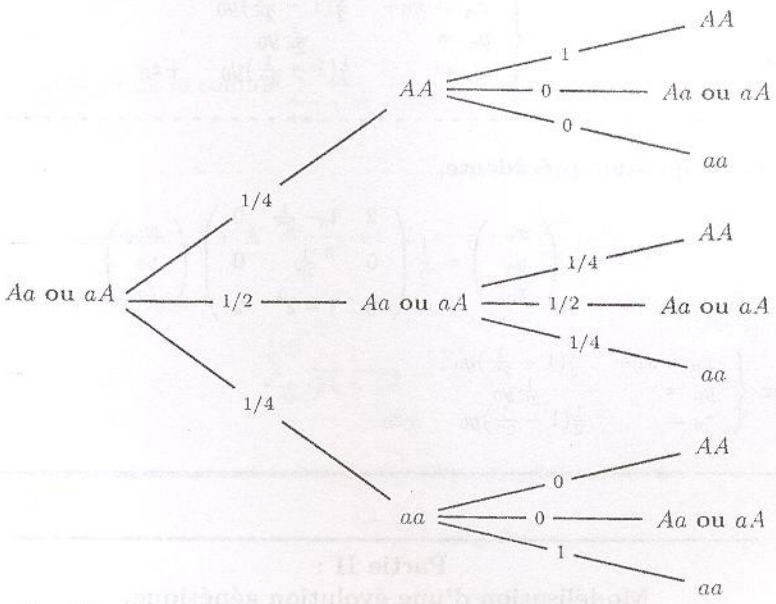
1. (a) Que valent $p_0,\ q_0,\ r_0$?

Comme la plante originelle, c'est-à-dire à la génération 0, est hétérozygote, alors :

- $p_0 = \mathbb{P}(E_0) = 0$,
- $q_0 = \mathbb{P}(F_0) = 1$,
- $r_0 = \mathbb{P}(G_0) = 0$.

(b) Calculer $p_1,\ q_1,\ r_1$ puis $p_2,\ q_2,\ r_2$.

Soit l'arbre pondéré suivant :



qui schématise l'évolution génétique des premières générations.
D'après cet arbre

$$p_1 = \frac{1}{4},\quad q_1 = \frac{1}{2},\quad r_1 = \frac{1}{4}$$

$$p_2 = 1\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{8},\quad q_2 = 0\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4},\quad r_2 = 0\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{8}.$$

(c) Montrer que $p_3 = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right)$.

Si on complète l'arbre pondéré jusqu'à la $3^{ième}$ génération, on obtient :

$$\begin{aligned} p_3 &= \left(1\cdot 1\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot 0\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot 0\cdot\frac{1}{4}\right) + \left(1\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\right) + \left(1\cdot 0\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot 0\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot 1\cdot\frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right). \end{aligned}$$

2. (a) Donner les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}(E_{n+1}|E_n)$, $\mathbb{P}(E_{n+1}|F_n)$ et $\mathbb{P}(E_{n+1}|G_n)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- **Si la plante de la $n^{ième}$ génération est de génotype AA, alors la plante de la $(n+1)^{ième}$ génération a toute la chance d'être de génotype AA. Soit $\mathbb{P}(E_{n+1}|E_n) = 1$,**
- **Si la plante de la $n^{ième}$ génération de génotype Aa ou aA, alors la plante de la $(n+1)^{ième}$ génération a une chance sur 4 d'être de génotype AA. Soit $\mathbb{P}(E_{n+1}|F_n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$,**
- **Si la plante de la $n^{ième}$ génération de génotype aa, alors la plante de la $(n+1)^{ième}$ génération n'a aucune chance d'être de génotype AA. Soit $\mathbb{P}(E_{n+1}|G_n) = 0$,**

(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad p_{n+1} = p_n + \dfrac{1}{4}q_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme (E_n, F_n, G_n) est un système complet d'événements, alors la formule des probabilités totales nous donne

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \mathbb{P}(E_{n+1}) = \mathbb{P}(E_{n+1}|E_n) \cdot \mathbb{P}(E_n) + \mathbb{P}(E_{n+1}|F_n) \cdot \mathbb{P}(F_n) + \mathbb{P}(E_{n+1}|G_n) \cdot \mathbb{P}(G_n) \\ &= 1 \cdot p_n + \frac{1}{4} \cdot q_n + 0 \cdot r_n = p_n + \frac{1}{4}q_n. \end{aligned}$$

(c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad q_{n+1} = \dfrac{1}{2}q_n \quad$ et $\quad r_{n+1} = \dfrac{1}{4}q_n + r_n$.

De même que la question précédente, on a :

- **Pour $q_{n+1} = \mathbb{P}(F_{n+1})$,**
  - **Si la plante de la $n^{ième}$ génération est de génotype AA, alors la plante de la $(n+1)^{ième}$ génération n'a aucune chance d'être de génotype Aa ou aA, alors $\mathbb{P}(F_{n+1}|E_n) = 0$,**
  - **Si la plante de la $n^{ième}$ génération de génotype Aa ou aA, alors la plante de la $(n+1)^{ième}$ génération a une chance sur 2 d'être de génotype Aa ou aA. Soit $\mathbb{P}(F_{n+1}|F_n) = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$,**
  - **Si la plante de la $n^{ième}$ génération de génotype aa, alors la plante de la $(n+1)^{ième}$ génération n'a aucune chance d'être de génotype Aa ou aA. Soit $\mathbb{P}(F_{n+1}|G_n) = 0$.**
  Donc

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= \mathbb{P}(F_{n+1}) = \mathbb{P}(F_{n+1}|E_n) \cdot \mathbb{P}(E_n) + \mathbb{P}(F_{n+1}|F_n) \cdot \mathbb{P}(F_n) + \mathbb{P}(F_{n+1}|G_n) \cdot \mathbb{P}(G_n) \\ &= 0 \cdot \mathbb{P}(E_n) + \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}(F_n) + 0 \cdot \mathbb{P}(G_n) = \frac{1}{2}q_n. \end{aligned}$$

- **Pour $r_{n+1} = \mathbb{P}(G_{n+1})$,**
  - **Si la plante de la $n^{ième}$ génération est de génotype AA, alors la plante de la $(n+1)^{ième}$ génération n'a aucune chance d'être de génotype aa, alors $\mathbb{P}(G_{n+1}|E_n) = 0$,**
  - **Si la plante de la $n^{ième}$ génération de génotype Aa ou aA, alors la plante de la $(n+1)^{ième}$ génération a une chance sur 4 d'être de génotype aa. Soit $\mathbb{P}(G_{n+1}|F_n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$,**

– **Si la plante de la $n^{ième}$ génération de génotype aa, alors la plante de la $(n+1)^{ième}$ génération a toute la chance d'être de génotype aa. Soit $\mathbb{P}(G_{n+1}|G_n) = 1$.**
Donc

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \mathbb{P}(G_{n+1}) = \mathbb{P}(G_{n+1}|E_n)\cdot\mathbb{P}(E_n) + \mathbb{P}(G_{n+1}|F_n)\cdot\mathbb{P}(F_n) + \mathbb{P}(G_{n+1}|G_n)\cdot\mathbb{P}(G_n) \\ &= 0\cdot\mathbb{P}(E_n) + \frac{1}{4}\cdot\mathbb{P}(F_n) + 1\cdot\mathbb{P}(G_n) = \frac{1}{4}q_n + r_n. \end{aligned}$$

---

3. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} p_n = -\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} \\ q_n = \frac{1}{2^n} \\ r_n = -\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

- -

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le système $\begin{cases} p_{n+1} = p_n + \frac{1}{4}q_n \\ q_{n+1} = \frac{1}{2}q_n \\ r_{n+1} = \frac{1}{4}q_n + r_n \end{cases}$ **s'écrit matriciellement**

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}M \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}.$$

Comme $p_0 = 0, q_0 = 1$ et $r_0 = 0$, alors, d'après ce qui précède,

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4^n}M^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne le résultat.

(b) Que se passe-t-il à long terme pour l'évolution de la plante originelle étudiée?

- -

Comme $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et par la suite,

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} r_n = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} q_n = 0.$$

Donc, à long terme pour l'évolution de la plante étudiée, on a toute la chance d'avoir une plante de génotype aa ou AA, c'est-à-dire avoir une plante homozygote.

Problème II

Partie A :
Calcul de la dérivée d'une fonction Ψ.

1. Pour t un réel, justifier l'existence de l'intégrale
$$\Psi(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}(xt)}{x^2+1}\mathrm{d}x.$$

Pour t un réel fixé,

- **La fonction $x\mapsto\dfrac{\operatorname{arctg}(xt)}{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$.**
- $\forall x\in\mathbb{R},\quad\left|\dfrac{\operatorname{arctg}(xt)}{x^2+1}\right|\leq\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2+1}.$

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x$ est évidemment convergente, alors, par comparaison, on obtient la convergence de l'intégrale $\Psi(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}(xt)}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

---

2. Montrer que la fonction $t\mapsto\Psi(t)$ ainsi définie est impaire.

Soit $t\in\mathbb{R}$, on a $\Psi(-t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}(-xt)}{x^2+1}\mathrm{d}x$.
Dans l'intégrale $\Psi(-t)$ on effectue le changement de variable $x\mapsto y=-x$ (bijection strictement décroissante et de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$), puis on utilise le fait que la fonction arctg est impaire, ce qui donne $\Psi(-t)=-\Psi(t)$.

---

3. Calculer $\Psi(0)$ et $\Psi(1)$.

- **La fonction Ψ est impaire. Donc $\Psi(0)=0$.**
- **Il suffit de remarquer que $\dfrac{\operatorname{arctg}(x)}{x^2+1}=\operatorname{arctg}'(x)\operatorname{arctg}(x)$. Donc**

$$\Psi(1)=\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x=\left[\frac{\operatorname{arctg}^2(x)}{2}\right]_0^{+\infty}=\frac{\pi^2}{8}.$$

---

4. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$$\forall(x,t)\in\mathbb{R}^2,\quad h(x,t)=\frac{\operatorname{arctg}(xt)}{x^2+1}.$$

(a) Déterminer la dérivée partielle $\dfrac{\partial h}{\partial t}(x,t)$.

La fonction $h : (x,t) \mapsto \dfrac{\operatorname{arctg}(xt)}{x^2+1}$ est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ (produit d'une fraction rationnelle la composée de arctg avec un polynôme) et la dérivée partielle $\dfrac{\partial h}{\partial t}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial h}{\partial t}(x,t) = \frac{x}{(x^2+1)(t^2x^2+1)}.$$

(b) Pour t un réel strictement positif, justifier l'existence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}x.$$

Pour t un réel strictement positif fixé,

- **La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{(x^2+1)(t^2x^2+1)}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$.**
- **Au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{x}{(x^2+1)(t^2x^2+1)} \sim \dfrac{1}{t^2} \cdot \dfrac{1}{x^3}$.**

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$ est évidemment convergente, alors, par comparaison, on obtient la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)(t^2x^2+1)}\mathrm{d}x.$

---

5. On admet que Ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\Psi'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)(t^2x^2+1)}\mathrm{d}x.$$

(a) Calculer $\Psi'(1)$. ($\Psi'(0)$ n'existe pas.)

Il suffit de remarquer que pour $u : x \mapsto x^2+1$, $\dfrac{x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$. Donc

$$\Psi'(1) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)(x^2+1)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2+1}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

(b) On suppose que $t \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{x}{(x^2+1)(t^2x^2+1)} = \frac{-1}{t^2-1} \cdot \frac{x}{x^2+1} + \frac{t^2}{t^2-1} \cdot \frac{x}{t^2x^2+1}.$$

Pour $t \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, on décompose la fraction rationnelle, en x, en éléments simples. D'après le cours, il existe des réels a, b, c et d (qui dependent de t) vérifiant :

$$G(x) = \frac{x}{(x^2+1)(t^2x^2+1)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{cx+d}{t^2x^2+1}.$$

- **En multipliant G par x^2+1 et en remplaçant x par le complexe i, on obtient**

$$(x^2+1)G(x)\big]_{x=i} = \frac{-i}{t^2-1} = ai+b.$$

D'où $a = \dfrac{-1}{t^2-1}$ et $b = 0$.

- **En multipliant G par t^2x^2+1 et en remplaçant x par le complexe $\frac{i}{t}$, on obtient**

$$(t^2x^2+1)G(x)\big]_{x=\frac{i}{t}} = \frac{i/t}{-1/t^2+1} = \frac{ci}{t} + d.$$

D'où $c = \dfrac{1}{-1/t^2+1} = \dfrac{t^2}{t^2-1}$ **et** $d = 0$.

Ce qui donne le résultat.

(c) En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \quad \Psi'(t) = \dfrac{\ln t}{t^2-1}$.

Pour $t \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, **on a :**

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) &= \int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)(t^2x^2+1)} \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \left\{ \frac{-1}{t^2-1} \cdot \frac{x}{x^2+1} + \frac{t^2}{t^2-1} \cdot \frac{x}{t^2x^2+1} \right\} \mathrm{d}x \\
&= \frac{-1}{t^2-1} \left\{ \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+1} \mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} \frac{t^2x}{t^2x^2+1} \mathrm{d}x \right\} \\
&= \frac{-1}{2(t^2-1)} \left\{ \left[\ln(x^2+1)\right]_0^{+\infty} - \left[\ln(t^2x^2+1)\right]_0^{+\infty} \right\} = \frac{-1}{2(t^2-1)} \cdot \left[\ln\left(\frac{x^2+1}{t^2x^2+1} \right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\ln t}{t^2-1}.
\end{aligned}$$

(d) Montrer que Ψ' est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Il est claire que Ψ' est continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. On a un problème en 1.
Au voisinage de 1, $\ln t \sim (t-1)$.
Donc on a bien $\Psi'(t) \sim_1 \dfrac{1}{t+1}$ **et par la suite** $\lim\limits_{t\to 1} \Psi'(t) = \dfrac{1}{2} = \Psi'(1)$. **D'où Ψ' est continue en 1 et par la suite, elle est continue sur** $\mathbb{R}_+^*$.

Partie B :
Fonction de répartition & limite de Ψ en $+\infty$.

Dans la suite, on considère deux variables aléatoires réelles X et Y, indépendantes de densité f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

On définit la la variable aléatoire réelle Θ de la manière suivante :

- Si X prend la valeur 0, Θ prend aussi la valeur 0.
- Sinon, $\Theta = \dfrac{Y}{X}$.

1. Donner une densité du couple (X, Y).
