République Tunisienne
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2017

الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2017

Concours Biologie et Géologie
Epreuve de Mathématiques

Session 2017	Date: 25 mai 2017	Heure: 8H	Durée : 3 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Exercice 1 (4 points)

On désigne par $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient ε et X deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que :

- ε suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.
- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

On pose $Y = \varepsilon X + 1$.

1. En utilisant le système complet d'événements $\{\varepsilon = 0\}$ et $\{\varepsilon = 1\}$, montrer que :
   (a) $\mathbb{P}(Y = 1) = 1 - p$.
   (b) $\mathbb{P}(Y = k) = p\mathbb{P}(X = k - 1)$, pour tout $k \geq 2$.
2. On suppose que X admet une espérance finie. Montrer que Y est d'espérance finie et que :
$$E[Y] = pE[X] + 1.$$
3. On suppose que X et Y ont même loi.
   (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a :
$$\mathbb{P}(X = k + 1) = p\mathbb{P}(X = k).$$
   (b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a :
$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)p^{k-1}.$$
   (c) Reconnaître alors la loi de X.
   (d) Retrouver alors la valeur de l'espérance d'une loi géométrique de paramètre $q = 1 - p$.

Exercice 2 (7 points)

Toutes les variables aléatoires intervenant dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Soit a un réel strictement positif. Pour tout entier naturel k, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(t) = \begin{cases} \alpha_k t^k & \text{si } t \in [0,a], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où α_k est un réel.

1. Déterminer α_k pour que f_k soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
2. Soit X une variable aléatoire réelle de densité f_k.
   (a) Montrer que la fonction de répartition de X est donnée par :
   $$F_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{x^{k+1}}{a^{k+1}} & \text{si } x \in [0,a], \\ 1 & \text{si } x > a. \end{cases}$$
   (b) Montrer que :
   $$E(X) = \frac{k+1}{k+2}a \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{k+1}{(k+2)^2(k+3)}a^2.$$
3. Soient k un entier naturel, U et V deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives f_0 et f_k.
   On pose $Y = U + V$ et f_Y une densité de Y. On rappelle que $f_Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(t-u) f_k(u)du$.
   (a) Montrer que pour tout réel $t \in [0,2a]$ on a :
   $$f_Y(t) = \frac{k+1}{a^{k+2}} \int_{\max(0,t-a)}^{\min(a,t)} u^k du.$$
   (b) Déterminer $\max(0, t-a)$ et $\min(a,t)$ dans chacun des cas suivants :
      i. $t \in [0,a[$.
      ii. $t \in [a, 2a]$.
   (c) En déduire qu'une densité de Y est donnée par :
   $$f_Y(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{k+1}}{a^{k+2}} & \text{si } t \in [0,a[, \\ \dfrac{1}{a} - \dfrac{(t-a)^{k+1}}{a^{k+2}} & \text{si } t \in [a,2a], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi, de densité f_2. On pose $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

(a) Montrer que la fonction de répartition de M_n est donnée par : $F_{M_n} = F_2^n$, (où F_2 est la fonction définie dans la question 2. (a) avec $k = 2$).

(b) En déduire une densité de M_n.

(c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} E(M_n) = a$.

5. On se propose, dans cette question, d'estimer le réel a à l'aide de l'échantillon $(X_1,\ldots,X_n)$ défini dans la question 4.

(a) Calculer $E\left(\dfrac{4}{3}X_i\right)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

(b) En déduire que $T_n = \dfrac{4}{3n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ est un estimateur sans biais de a.

(c) Calculer la variance $V(T_n)$ en fonction de a et n.

(d) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(T_n - 1{,}96\dfrac{a}{\sqrt{15n}} \leqslant a \leqslant T_n + 1{,}96\dfrac{a}{\sqrt{15n}}\right) = 0{,}95.$

(On donne $\Phi(1{,}96) = 0{,}975$, où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$).

(e) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\dfrac{\sqrt{15n}}{\sqrt{15n}+1{,}96}T_n \leqslant a \leqslant \dfrac{\sqrt{15n}}{\sqrt{15n}-1{,}96}T_n\right) = 0{,}95.$

(f) Donner alors un intervalle de confiance de niveau de confiance $0{,}95$ du paramètre a.

Problème (9 points)

Notations

- On note par $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ donnée par :

$$e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1).$$

- On désigne par $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$ et par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne.
- On note par $id_{\mathbb{R}^3}$ l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.
- On note par I_3 la matrice identité d'ordre 3.

Soit z_0 le vecteur de $\mathbb{R}^3$ défini par $z_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)$. On définit l'application $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par :

$$\forall u \in \mathbb{R}^3, \qquad \varphi(u) = \langle z_0, u\rangle z_0.$$

Partie I

1. (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(b) Pour $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, donner l'expression de $\varphi(u)$ en fonction de x, y et z.

(c) Déterminer le noyau et l'image de φ.

(d) φ est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

2. (a) Vérifier que la matrice de φ, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, est donnée par :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Justifier l'existence d'une base orthonormale, dans laquelle la matrice A est diagonalisable.

(c) Montrer que $\varphi \circ \varphi = \varphi$.

3. (a) Sans calculer le polynôme caractéristique, déterminer les valeurs propres de A.

(b) Déterminer une représentation cartésienne de chaque espace propre de φ.

(c) Soient $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)$ et $u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)$.
Vérifier que $\mathcal{B}' = (u_1,u_2,u_3)$ est une base orthonormale de vecteurs propres de φ.

(d) Trouver alors une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que : $D = {}^tPAP$, où ${}^tP$ est la transposée de la matrice P.

(e) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie II

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $\varphi_\alpha = id_{\mathbb{R}^3} + \alpha\varphi$.
On note A_α la matrice de φ_α dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. (a) Montrer que pour tout $\alpha \neq 0$, $\det A_\alpha = \alpha^3 P_A(-\alpha^{-1})$, où P_A est le polynôme caractéristique de A.

(b) Quelle(s) condition(s) doit vérifier α pour que φ_α soit un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

(c) Pour α et β dans $\mathbb{R}$, montrer que $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta = \varphi_{\alpha+\alpha\beta+\beta}$.

(d) En déduire l'expression de φ_α^{-1} pour $\alpha \neq -1$.

2. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles on a : $\|\varphi_\alpha(u)\|^2 = \|u\|^2$, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$.

3. (a) Justifier que φ_{-2} est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

(b) Déterminer les sous espaces propres associés à chaque valeur propre de φ_{-2}.

Partie III

On considère $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles définies par : $x_0 = y_0 = z_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{6}x_n + \frac{1}{3}y_n + \frac{1}{3}z_n, \\ y_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + \frac{1}{6}y_n - \frac{1}{3}z_n, \\ z_{n+1} = \frac{1}{3}x_n - \frac{1}{3}y_n + \frac{1}{6}z_n. \end{cases}$$

On note $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $X_{n+1} = \frac{1}{2}A_{-2}X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $A_{-2}^{2p} = I_3$ et $A_{-2}^{2p+1} = A_{-2}$, pour tout $p \geq 0$.
3. En déduire les expressions de x_n, y_n et z_n en fonction de n.
4. Calculer les limites de x_n, y_n et z_n quand $n \to +\infty$.

Fin de l'énoncé