

Corrigé concours BG

Exercice 1 :

1. $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(\varepsilon = 0)\mathbb{P}(Y = k|\varepsilon = 0) + \mathbb{P}(\varepsilon = 1)\mathbb{P}(Y = k|\varepsilon = 1)$

(a) Pour $k = 1$ on a :

$$\mathbb{P}(Y = 1|\varepsilon = 0) = 1 \text{ et } \mathbb{P}(Y = 1|\varepsilon = 1) = \mathbb{P}(X = 0) = 0.$$

On obtient donc $\mathbb{P}(\{Y = 1\}) = 1 - p$.

(b) Pour $k \geq 2$ on a :

$$\mathbb{P}(Y = k|\varepsilon = 0) = 0 \text{ et } \mathbb{P}(Y = k|\varepsilon = 1) = \mathbb{P}(X = k - 1) = 0.$$

On obtient donc $\mathbb{P}(\{Y = k\}) = p\mathbb{P}(\{X = k - 1\})$.

2. X admet une espérance finie donc la série $\sum k\mathbb{P}(\{X = k\})$ est absolument convergente. De plus $\sum \mathbb{P}(\{X = k\})$ converge absolument donc la série somme $\sum (k + 1)\mathbb{P}(\{X = k\})$ l'est aussi d'où $\sum k\mathbb{P}(\{X = k - 1\})$ est absolument convergente et par suite $\sum k\mathbb{P}(\{Y = k\})$ cv ABS donc Y est d'espérance finie.

les variables aléatoires ε et X sont indépendantes, donc $E[\varepsilon X] = E[\varepsilon]E[X]$. D'où :

$$E[Y] = E[\varepsilon X + 1] = E[\varepsilon]E[X] + 1 = pE[X] + 1.$$

3. X et Y ont même loi signifie que :

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$; $\mathbb{P}(\{Y = k\}) = \mathbb{P}(\{X = k\})$.

- (a) pour $k \geq 1$ on obtient $\mathbb{P}(X = k + 1) = \mathbb{P}(Y = k + 1) = p\mathbb{P}(X = k)$, car $k + 1 \geq 2$.
 (b) la suite $(\mathbb{P}(X = k))_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison p et de premier terme $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) = 1 - p$ donc

$$\forall k \in \mathbb{N}^*; \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X = 1)p^{k-1} = (1 - p)p^{k-1}.$$

- (c) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)p^{k-1}$; $\forall k \in \mathbb{N}^*$ donc X suit une loi géométrique de paramètre $1 - p$.
 (d) On a $E[Y] = E[X]$. D'autre part $E[Y] = pE[X] + 1$.
 Donc $(1 - p)E[X] = 1$ ce qui donne que $E[X] = \frac{1}{1 - p} = \frac{1}{q}$.

Exercice 2 :

$$f_k(t) = \begin{cases} \alpha_k t^k & \text{si } t \in [0, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. la fonction f_k est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0, a\}$.

f_k doit être positive ou nulle ce qui implique que le réel $\alpha_k \geq 0$.

$$\int_{\mathbb{R}} f_k(t) dt = 1 \iff \left[\alpha_k \frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^a = 1 \iff \alpha_k \frac{a^{k+1}}{k+1} = 1.$$

$$\text{Donc } \alpha_k = \frac{k+1}{a^{k+1}}.$$

$$2. (a) F_k(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_k(t) dt.$$

$$\text{si } x < 0; F_k(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0,$$

$$\text{si } 0 \leq x \leq a; F_k(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \alpha_k t^k dt = \frac{x^{k+1}}{a^{k+1}},$$

$$\text{si } x > a; F_k(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^a \alpha_k t^k dt + \int_a^x 0 dt = 1.$$

$$\text{Donc } F_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^{k+1}}{a^{k+1}} & \text{si } 0 < x < a \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}$$

$$(b) E(X) = \int_{\mathbb{R}} t f_k(t) dt = \int_0^a \alpha_k t^{k+1} dt = \left[\frac{k+1}{a^{k+1}} \frac{t^{k+2}}{k+2} \right]_0^a = \frac{k+1}{k+2} a.$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

$$E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} t^2 f_k(t) dt = \int_0^a \alpha_k t^{k+2} dt = \left[\frac{k+1}{a^{k+1}} \frac{t^{k+3}}{k+3} \right]_0^a = \frac{k+1}{k+3} a^2 \text{ donc}$$

$$V(X_k) = \frac{k+1}{(k+2)^2(k+3)} a^2$$

$$3. (a) f_Y(t) = \int_{\mathbb{R}} f_k(u) f_0(t-u) du. \text{ or}$$

$$\begin{aligned} f_0(t-u) f_k(u) &= \begin{cases} \frac{(k+1)u^k}{a^{k+2}} & \text{si } 0 \leq u \leq a \text{ et } 0 \leq t-u \leq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{(k+1)u^k}{a^{k+2}} & \text{si } 0 \leq u \leq a \text{ et } t-a \leq u \leq t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{(k+1)u^k}{a^{k+2}} & \text{si } u \in [\max(0, t-a), \min(a, t)] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

On vérifie (graphiquement) que pour $t \in [0, 2a]$, $\max(0, t-a) \leq \min(a, t)$. Donc

$$f_Y(t) = \frac{k+1}{a^{k+2}} \int_{\max(0, t-a)}^{\min(a, t)} u^k du.$$

$$(b) \text{ i. Pour } t \in [0, a]; \max(0, t-a) = 0 \text{ et } \min(a, t) = t$$

$$\text{ii. Pour } t \in [a, 2a]; \max(0, t-a) = t-a \text{ et } \min(a, t) = a$$

(c) Les variables aléatoires U et V sont à valeurs dans $[0, a]$ dans Y prend ses valeurs dans $[0, 2a]$ ainsi si $t \notin [0, 2a]$; $f_Y(t) = 0$.

$$\text{Si } t \in [0, a]; f_Y(t) = \frac{k+1}{a^{k+2}} \int_0^t u^k du = \frac{t^{k+1}}{a^{k+2}}.$$

$$\text{Si } t \in [a, 2a]; f_Y(t) = \frac{k+1}{a^{k+2}} \int_{t-a}^a u^k du = \frac{1}{a} - \frac{(t-a)^{k+1}}{a^{k+2}}.$$

$$4. (a) F_{M_n}(t) = P(M_n \leq t) = P(X_1 \leq t, X_2 \leq t, \dots, X_n \leq t) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq t) = F_2^n(t), \text{ car}$$

les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont indépendantes.

$$(b) F_2^n = F_{3n-1} \text{ donc } M_n \text{ a pour densité } f_{3n-1}.$$

- (c) D'après 1.c $E(M_n) = \frac{3n}{3n+1}a$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(M_n) - a = 0$.
5. (a) $E(\frac{4}{3}X_k) = \frac{4}{3}E(X_k) = \frac{4}{3}E(X_2) = \frac{4}{3}\frac{3}{4}a = a$

$$(b) E(T_n) = \frac{4}{3n} \sum_{k=1}^n E(X_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(\frac{4}{3}Y_k) = a$$

donc T_n est un estimateur sans biais de a .

- (c) Puisque les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont indépendantes on a : les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont indépendantes :

$$V(T_n) = \frac{16}{9n^2} \sum_{k=1}^n V(X_k) = \frac{16}{9n^2} \frac{3}{80} a^2 = \frac{a^2}{15n}.$$

- (d) D'après théorème limite centrée on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(-\alpha < \frac{T_n - a}{\sigma(T_n)} < \alpha) = \Phi(\alpha) - \Phi(-\alpha) \text{ avec } \Phi \text{ est la fonction de répartition de } \mathcal{N}(0, 1).$$

Or $\Phi(-\alpha) = 1 - \Phi(\alpha)$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(-\alpha < \frac{T_n - a}{\sigma(T_n)} < \alpha) = 2\Phi(\alpha) - 1.$$

Pour $\alpha = 1,96$; $\Phi(\alpha) = 0,975$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(-1,96 < \frac{T_n - a}{\frac{a}{\sqrt{15n}}} < 1,96) = 0,95.$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(T_n - \frac{1,96a}{\sqrt{15n}} < a < T_n + \frac{1,96a}{\sqrt{15n}}) = 0,95.$$

- (e) on a

$$T_n - \frac{1,96a}{\sqrt{15n}} < a \Leftrightarrow a > \frac{T_n \sqrt{15n}}{\sqrt{15n} + 1,96}$$

et

$$T_n + \frac{1,96a}{\sqrt{15n}} > a \Leftrightarrow a < \frac{T_n \sqrt{15n}}{\sqrt{15n} - 1,96},$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\frac{T_n \sqrt{15n}}{\sqrt{15n} + 1,96} < a < \frac{T_n \sqrt{15n}}{\sqrt{15n} - 1,96}) = 0,95.$$

- (f) D'après ce qui précède, l'intervalle $[\frac{T_n \sqrt{15n}}{\sqrt{15n} + 1,96}, \frac{T_n \sqrt{15n}}{\sqrt{15n} - 1,96}]$ est un intervalle de confiance (asymptotique) du paramètre a de niveau de confiance 0,95.

Problème : Partie I

1. (a) $\varphi(\lambda u + v) = \langle z_0, \lambda u + v \rangle z_0 = (\lambda \langle z_0, u \rangle + \langle z_0, v \rangle) z_0 = \lambda \varphi(u) + \varphi(v)$. donc $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$
- (b) Par définition du produit scalaire usuel de \mathbb{R}^3 on a :

$$\langle z_0, u \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - y - z)$$

$$\text{Donc } \varphi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - y - z)z_0 = \frac{1}{3}(x - y - z, -x + y + z, -x + y + z).$$

- (c) $\ker(\varphi) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \varphi(x, y, z) = (0, 0, 0)\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y + z\} = \text{Vect}\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$.
 $\text{Im}(\varphi) = \text{Vect}\{\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)\} = \text{Vect}\{z_0\}$.
- (d) $\ker(\varphi) \neq \{(0, 0, 0)\}$ donc φ n'est pas injectif et par suite φ n'est pas un automorphisme.

2. (a) $\varphi(e_1) = \frac{1}{3}(1, -1, -1); \varphi(e_2) = \frac{1}{3}(-1, 1, 1)$ et $\varphi(e_3) = \frac{1}{3}(-1, 1, 1)$ donc

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) A est une matrice symétrique réelle, elle est donc diagonalisable dans une base orthonormale.
- (c) $\varphi \circ \varphi(u) = \varphi(\langle z_0, u \rangle z_0) = \langle z_0, \langle z_0, u \rangle z_0 \rangle z_0 = \langle z_0, z_0 \rangle \langle z_0, u \rangle z_0 = \langle z_0, u \rangle z_0 = \varphi(u)$ car $\langle z_0, z_0 \rangle = 1$.
3. (a) Soit λ une valeur propre de φ il existe un vecteur non nul x_λ tel que $\varphi(x_\lambda) = \lambda x_\lambda$ donc

$$\varphi \circ \varphi(x_\lambda) = \varphi(\lambda x_\lambda) = \lambda \varphi(x_\lambda) = \lambda^2 x_\lambda.$$

D'autre part

$$\varphi \circ \varphi(x_\lambda) = \varphi(x_\lambda) = \lambda x_\lambda$$

Puisque x_λ est un vecteur non nul, on obtient $\lambda^2 = \lambda$ donc $\lambda \in \{0, 1\}$.

Si 1 est la seule valeur propre de φ , alors $\varphi = id_{\mathbb{R}^3}$ absurde.

Si 0 est la seule valeur propre de φ , alors φ est l'endomorphisme nul ce qui est absurde.

Et par suite

$$Sp(\varphi) = \{0, 1\}.$$

- (b) $E_0(\varphi) = \ker(\varphi) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y + z\}$.
 $E_1(\varphi) = \ker(\varphi - id) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = z = -x\}$.

- (c) On vérifie aisément que $\forall 1 \leq i \leq 3, \forall 1 \leq j \leq 3; \langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

De plus $\varphi(u_1) = \varphi(u_2) = 0$ et $\varphi(u_3) = u_3$.

- (d) P est la matrice de passage de la base canonique à la base \mathcal{B}'

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (e) $\varphi \circ \varphi = \varphi$ donc $A^2 = A$ donc $A^n = A; \forall n \in \mathbb{N}^*$

Partie II

1. (a) $\alpha \neq 0; \det(A_\alpha) = \det(\alpha(A + \frac{1}{\alpha} id_{\mathbb{R}^3})) = \alpha^3 \det(A + \frac{1}{\alpha} id_{\mathbb{R}^3}) = \alpha^3 P_A(-\alpha^{-1})$.

- (b) φ_α est un automorphisme ssi $\det(A_\alpha) \neq 0$.

Pour $\alpha = 0$, $A_0 = I_3$ est inversible.

Pour $\alpha \neq 0; \det(A_\alpha) \neq 0 \iff P_A(-\alpha^{-1}) \neq 0 \iff -\alpha^{-1}$ n'est pas une valeur propre de A c-à-d $\alpha \neq -1$.

- (c) $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta = (id + \alpha\varphi) \circ (id + \beta\varphi) = id + (\alpha + \beta + \alpha\beta)\varphi = \varphi_{\alpha+\beta+\alpha\beta}$.

(d) Pour $\alpha + \beta + \alpha\beta = 0$ on obtient $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta = id$.

$$\alpha + \beta + \alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -\frac{\alpha}{1+\alpha}.$$

Donc

$$\varphi_\alpha^{-1} = \varphi_{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

2. $\langle \varphi(u), \varphi(u) \rangle = \langle u, u \rangle + (\alpha^2 + 2\alpha) \langle z_0, u \rangle^2 = \langle u, u \rangle$ donc $\alpha^2 + 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ou $\alpha = -2$.
3. $A_{-2} = I_3 - 2A = P(I - 2D)^t P$ donc A_{-2} est diagonalisable et les valeurs propre de A_{-2} sont -1 et 1 .
4. $E_{-1}(\varphi_{-2}) = Im(\varphi)$ et $E_1(\varphi_{-2}) = ker(\varphi)$

Partie III

1. $X_{n+1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} X_n = \frac{1}{2} A_{-2} X_n$
2. on a $A_{-2}^2 = I_3$ donc $A_{-2}^{2n} = I_3$ et $A_{-2}^{2n+1} = A_{-2}$.
3. Par récurrence on a $X_n = \frac{1}{2^n} A_{-2}^n X_0$. on obtient donc

$$\begin{cases} x_{2n} = y_{2n} = z_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \\ x_{2n+1} = \frac{5}{3 \times 2^{2n+1}} \\ y_{2n+1} = z_{2n+1} = \frac{1}{3 \times 2^{2n+1}} \end{cases}.$$

4. $\lim x_n = \lim y_n = \lim z_n = 0$.