CORRECTION

CORRIGE EXERCICE 1

1. Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caracteristique $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$,

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -2 \\ 2 & -1-\lambda & -4 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 2 & -1-\lambda & -4 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & -6 \\ -1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$P_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$. Donc Les valeurs propres de A sont 1 double et 2 simple.

---

2. On vérifie : $(A - 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -y - 2z = 0 \\ 2x - 3y - 4z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2z \\ 2x + 2z = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases} \iff$

$\begin{cases} y = -2z \\ z = -x \end{cases}$

Les solutions ne sont pas toutes nulles donc 2 est valeur propre associé au sous espace propre $E_2 = \text{Vect}\left((1, 2, -1)\right)$.

La famille $((1, 2, -1))$ est formée d'un seul vecteur non nul, est donc libre. Donc c'est une base de E_2. **Conclusion :** $\dim(E_2) = 1$.

$$(A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ 2x - 2y - 4z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y + 2z \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Donc 1 est valeur propre associé au sous espace propre $E_1 = \text{Vect}\left((1, 1, 0), (2, 0, 1)\right)$

$((1, 1, 0), (2, 0, 1))$ sont deux vecteurs non proportionnels donc libre. $((1, 1, 0), (2, 0, 1))$ est donc une base de E_1. **Conclusion :** $\dim(E_1) = 2$.

Comme la somme des dimensions de ces sous espaces propres est 3, l'ordre de la matrice et A est diagonalisable.

---

3. Les bases des sous espaces propres forme une base de $\mathbb{R}^3$.

$\Big((1, 2, -1), (1, 1, 0), (2, 0, 1)\Big)$ est donc une base de vecteurs propres et d'après la formule de changement de base on a $D = P^{-1} A\, P$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

4. On calcule P^{-1} par Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 + L_1}{\overset{L_2 - 2L_1}{\iff}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 + L_2}{\overset{L_1 + L_2 \quad -L_2}{\iff}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{-L_3}{\overset{\substack{L_1 - 2L_3 \\ L_2 + 4L_3}}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Autrement: $\det P = 1$.

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\, {}^t\mathrm{Com}(P) = {}^t\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Conclusion : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

---

5. On a $M = aI_3 + bA$ alors $\Delta = P^{-1}(aI_3 + bA)P = aI_3 + bD$ est bien diagonale.

---

6. Comme P et P^{-1} sont inversibles, M est inversible si et seulement si Δ l'est.
La matrice diagonale

$$\Delta = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}$$

Donc Δ est inversible si et seulement si $a + 2b \neq 0$ et $a + b \neq 0$.

Conclusion : M inversible si et seulement si $a + 2b \neq 0$ et $a + b \neq 0$.

---

7. On a $M^2 = I_3 \Longleftrightarrow (P\Delta P^{-1})^2 = I_3 \Longleftrightarrow P\Delta^2 P^{-1} = I_3 \Longleftrightarrow \Delta^2 = P^{-1} I_3\, P = I_3$.
Conclusion : $M^2 = I_3 \Longleftrightarrow \Delta^2 = I_3$.

Or $\Delta^2 = \begin{pmatrix} (a+2b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (a+b)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix}$ donc $\Delta^2 = I_3 \Longleftrightarrow a + 2b = \pm 1$ et $a + b = \pm 1$

Ce qui donne quatre systèmes :

(1) $\begin{cases} a + 2b = 1 \\ a + b = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} a + 2b = 1 \\ a + b = -1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = -3 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} a + 2b = -1 \\ a + b = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ a = 3 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} a + 2b = -1 \\ a + b = -1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -1 \end{cases}$

Conclusion : Les 4 matrices sont donc

$M(a = 1, b = 0)$, $M(a = -3, b = 2)$, $M(a = 3, b = -2)$ et $M(a = -1, b = 0)$.

CORRIGE EXERCICE 2

Partie I

1. a) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} P(U+V=n) &= \sum_{k=0}^{n} P(U=k, V=n-k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^k}{k!} \frac{e^{-\lambda(1-p)}(\lambda p)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\ &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \end{aligned}$$

$U+V$ suit la loi de Poisson de parmètre λ.

---

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $0 \leq k \leq n$, on a:

$$\begin{aligned} P(U=k/U+V=n) &= \frac{P(U=k,\, V=n-k)}{P(U+V=n)} \\ &= \frac{P(U=k)P(V=n-k)}{P(U+V=n)} \\ &= \frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^k e^{-\lambda(1-p)}(\lambda(1-p))^{n-k} n!}{k!(n-k)! e^{-\lambda}\lambda^n} \\ &= C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

d' où la loi de U sachant $(U+V=n)$ est la loi binomiale de paramètres n, p.

---

2. Les variables aléatoires T et S sont indépendantes telles que
   - $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(T+S=n) \neq 0$,
   - $\forall k \in \{0, 1, ..., n\}$, $P(T=k/T+S=n) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

   On définit les suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) par :

$$u_n = \frac{n!\, P(T=n)}{p^n}, \qquad v_n = \frac{n!\, P(S=n)}{(1-p)^n}, \qquad w_n = n!\, P(T+S=n)$$

a) On a:

$$\begin{aligned} P(T=k/T+S=n) &= \frac{P(T=k,\, S=n-k)}{P(T+S=n)} \\ &= \frac{P(T=k)P(S=n-k)}{P(T+S=n)} \\ &= \frac{u_k p^k v_{n-k}(1-p)^{n-k} n!}{k!(n-k)! w_n} \\ &= \frac{u_k v_{n-k}}{w_n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

On déduit que: $\dfrac{u_k\, v_{n-k}}{w_n} = 1$ d'où $u_k\, v_{n-k} = w_n$.

---

b) Pour $k = n$, $u_n\, v_0 = w_n \neq 0$ ce qui donne $v_0 \neq 0$.
Pour $k = 0$, $u_0\, v_n = w_n \neq 0$ ce qui donne $u_0 \neq 0$.

---

c) Pour $k = n-1$, $u_{n-1}\, v_1 = w_n$ et $u_n\, v_0 = w_n \Longrightarrow \dfrac{u_n}{u_{n-1}} = \dfrac{v_1}{v_0}$.

Pour $k = 1$, $u_0\, v_n = w_n$ et $u_1\, v_{n-1} = w_n \Longrightarrow \dfrac{v_n}{v_{n-1}} = \dfrac{u_1}{u_0}$.

Les suites u_n et v_n sont géométriques de raisons respectivement $\lambda_1 = \frac{v_1}{v_0}$ et $\lambda_2 = \frac{u_1}{u_0}$.

---

d) On a $u_n = u_0\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^n$ et $v_n = v_0\left(\frac{u_1}{u_0}\right)^n$ or $w_1 = u_n\, v_0 = u_0\, v_n \Longrightarrow u_0\, v_0\left(\dfrac{v_1}{v_0}\right)^n = u_0 v_0\left(\dfrac{u_1}{u_0}\right)^n \Longrightarrow$ $\lambda_1 = \lambda_2$.

---

e) $P(T = k) = \dfrac{p^k}{k!}u_k = \dfrac{p^k}{k!}u_0\alpha^k = u_0\dfrac{(\alpha\, p)^k}{k!}$.

$P(S = k) = \dfrac{(1-p)^k}{k!}v_k = \dfrac{(1-p)^k}{k!}v_0\alpha^k = v_0\dfrac{(\alpha(1-p))^k}{k!}$.

---

f) On a: $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(T = k) = 1 = u_0\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\alpha\, p)^k}{k!} = u_0 e^{\alpha\, p}$, d'où $u_0 = e^{-\alpha\, p}$. Donc T une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\alpha\, p$.

On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(S = k) = 1 = v_0\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\alpha(1-p))^k}{k!} = v_0 e^{\alpha(1-p)}$, d'où $v_0 = e^{-\alpha(1-p)}$. Donc S une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\alpha(1-p)$.

Partie II

1. On vérifie que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^n e^{-\lambda} p^k (1-p)^{n-k}}{k!(n-k)!} &= e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}\\ &= e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!} = 1\end{aligned}$$

---

2. La loi de X est donnée par: $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}P(X = n) &= \sum_{k=0}^{n} P(X = n, Y = k) = \sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^n e^{-\lambda} p^k (1-p)^{n-k}}{k!(n-k)!}\\ &= \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda},\end{aligned}$$

alors $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.
La loi de Y est donnée par: $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$P(Y = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(X = n, Y = k) = \sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^n e^{-\lambda} p^k (1-p)^{n-k}}{k!(n-k)!}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{p^k\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!}(1-p)^{n-k}\\
&= \frac{p^k\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^{j}}{(j!}(1-p)^{j}\\
&= \frac{(p\lambda)^k}{k!}e^{-\lambda p},
\end{aligned}
$$

alors $Y \sim \mathcal{P}(\lambda p)$, de plus pour tout $k \leq n$, on a:

$$P(X=n, Y=k) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda} p^k (1-p)^{n-k}}{k!(n-k)!} \neq P(X=n)P(Y=k) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}e^{-\lambda p}$$

en déduire que X et Y ne sont pas indépendantes.

---

3. L'ensemble des valeurs prises par la variable $\Big(Y/X=n\Big)$ est $\{0, \cdots, n\}$, alors la loi conditionnelle de Y sachant $X=n$ est donnée par: pour tout $0 \leq k \leq n$,

$$P(Y=k/X=n) = \frac{P(Y=k, X=n)}{P(X=n)} = \frac{\lambda^n e^{-\lambda} p^k (1-p)^{n-k}}{k!(n-k)!}\frac{n!}{\lambda^n e^{-\lambda}} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$$

donc $\Big(Y/X=n\Big) \sim \mathcal{B}(n,p)$.

---

4. $Y \sim \mathcal{P}(\lambda p)$, $(-Y) \sim \mathcal{P}(-\lambda p)$, d'où $Z = X + (-Y) \sim \mathcal{P}(\lambda(1-p))$.

---

5. Pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, on a:

$$
\begin{aligned}
P(Z=n, Y=k) &= P(X-Y=n, Y=k) = P(X=n+k, Y=k) = \frac{\lambda^{n+k}e^{-\lambda}p^k(1-p)^n}{k!\,n!}\\
&= \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}\frac{(\lambda(1-p))^n}{n!}e^{\lambda(1-p)} = P(Z=n)P(Y=k),
\end{aligned}
$$

donc les variables Y et Z sont indépendantes.

---

6. **Application** : Pour une certaine race de mammifères, à chaque portée, le nombre X de petits suit une loi de Poisson de paramètre 5. La probabilité pour qu'un petit soit une femelle est 0,6. On note Y le nombre de femelles par portée.

   a) $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = 5$, et la loi conditionnelle de Y sachant $X=n$ est la loi $\mathcal{B}(n,p)$ avec $p = 0.6$. Nous sommes donc bien dans la situation traitée de façon générale au-dessus avec ici $\lambda = 5$ et $p = 0.6$. La loi de (X,Y) est donc définie par:

$$
\begin{aligned}
P(X=n, Y=k) &= \frac{\lambda^n e^{-\lambda} p^k (1-p)^{n-k}}{k!(n-k)!} \quad \text{si } 0 \leq k \leq n,\\
P(X=n, Y=k) &= 0 \quad \text{sinon.}
\end{aligned}
$$

---

b) Sachant qu'une portée est constituée de 7 petits, quelle est la probabilité qu'il y ait 4 mâles et 3 femelles est

$$P(Y=3/X=7)=C_7^3(0.6)^3(0.4)^4.$$

---

c) Soit E l'evennement " La naissance de 3 mâles exactement dans une même portée".

$$\begin{aligned}
P(E) &= \sum_{n\geq 3} P(Y=n-3/X=n)P(X=n) \\
&= \sum_{n\geq 3} C_n^{n-3}(p)^{n-3}(1-p)^3\frac{5^n}{n!}e^{-5} \\
&= \frac{5^3(0,4)^3}{3!}e^{-5}\sum_{n\geq 3}\frac{(0,6)^{n-3}5^{n-3}}{(n-3)!} \\
&= \frac{2^3}{3!}e^{-5}\sum_{n\geq 3}\frac{3^{n-3}}{(n-3)!} = \frac{8}{6}e^{-5}e^3 = \frac{4}{3}e^{-2}.
\end{aligned}$$

CORRIGE EXERCICE 3

1. Le polynôme caracteristique $r(r+\frac{1}{b})=0 \Longrightarrow r=0,\ r=-\frac{1}{b}$, d'où $F(x)=A+Be^{-\frac{1}{b}x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1=A,\ \ F(a)=A+Be^{-\frac{1}{b}a}=0 \Longrightarrow B=-e^{\frac{1}{b}a}$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{si } x\leq a \\ 1-e^{-\frac{x-a}{b}}, & \text{si } x\geq a \end{cases}$$

---

2. La densité de X est donnée par

$$f_{a,b}(x)=F'_X(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\leq a \\ \frac{1}{b}e^{-\frac{x-a}{b}} & \text{si } x\geq a \end{cases}$$

---

3. $E(X)=\int_{\mathbb{R}} tf_{a,b}(t)dt=\frac{1}{b}\int_a^{+\infty} te^{-\frac{x-a}{b}}dt=a+b$

$E(X^2)=\int_{\mathbb{R}} t^2f_{a,b}(t)dt=\frac{1}{b}\int_a^{+\infty} t^2e^{-\frac{x-a}{b}}dt=(a+b)^2+b^2.$

$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=b^2.$

---

4. $T_n=\min(X_1,...,X_n)$

a) Si $x\geq a$, $P(T_n\leq x)=1-P(T_n>x)=1-\prod_{k=1}^n P(X>x)=1-e^{-\frac{x-a}{\frac{b}{n}}}$.
Si $x<a$, $F_{T_n}(x)=0$ donc

$$F_{T_n}(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<a \\ 1-e^{-n\frac{x-a}{b}} & \text{si } x\geq a \end{cases}$$

---

b) La variable T_n suit une loi de densité $f_{a,\frac{b}{n}}$.

---

c) $E(T_n) = a + \frac{b}{n}$ et $V(T_n) = \frac{b^2}{n^2}$.

---

d) $P(|T_n - a| \geq \varepsilon) \leq \frac{E((T_n-a)^2)}{\varepsilon^2}$, or

$E((T_n - a)^2) = V(T_n - a) + (E(T_n - a))^2 = V(T_n) + (E(T_n) - a)^2 = V(T_n)$, donc

$E((T_n - a)^2) = \dfrac{b^2}{n^2}$, d'où $P(|T_n - a| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{2b^2}{\varepsilon n^2}$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} P(|T_n - a| \geq \varepsilon) = 0.$$

---

5. Si $Y = X - a$ alors $Y \in [0, \infty[$.

a) $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq y + a) = F_X(y + a) = \begin{cases} 0 & si \quad y < 0 \\ 1 - e^{-\frac{y}{b}} & si \quad y \geq 0 \end{cases}$

$Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\frac{1}{b})$.

---

b) $E(Y) = b$, $V(Y) = b^2$.

---

c) Soit $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$, on a:

$$\begin{aligned} P(Y > t + s / Y > t) &= \frac{P(Y > t + s, Y > t)}{P(Y > t)} = \frac{P(Y > t + s)}{P(Y > t)} \\ &= \frac{1 - F(t + s)}{1 - F(t)} = \frac{e^{\lambda(t+s)}}{e^{\lambda(t)}} = e^{\lambda(s)} \\ &= 1 - F(s) = P(Y > s). \end{aligned}$$

D'où les lois exponentielles sont sans mémoire.

---

6. Soit $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

a) $E(M_n) = b$ donc M_n est un estimateur sans biais de b.

---

b) $V(M_n) = \frac{b^2}{n}$ donc $\sigma(M_n) = \frac{b}{\sqrt{n}}$.

D'après TCL $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|\dfrac{M_n - b}{\sigma(M_n)}| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2\phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) - 1 = 1 - \alpha$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} P(|M_n - b| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{b}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha.$$

---

c) On a:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} P(|M_n - b| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{b}{\sqrt{n}}) &= \lim_{n\to+\infty} P(M_n - z_{1-\alpha/2}\frac{b}{\sqrt{n}} < b < M_n + z_{1-\alpha/2}\frac{b}{\sqrt{n}}) \\ &= \lim_{n\to+\infty} P(\frac{\sqrt{n}M_n}{\sqrt{n}+z_{1-\alpha/2}} < b < \frac{\sqrt{n}M_n}{\sqrt{n}-z_{1-\alpha/2}}) = 1-\alpha.\end{aligned}$$

---

d) L'intervalle de confiance au seuil de risque α est donné par:

$$\left[\frac{\sqrt{n}M_n}{\sqrt{n}+z_{1-\alpha/2}}, \frac{\sqrt{n}M_n}{\sqrt{n}-z_{1-\alpha/2}}\right].$$

---

7. Pour $n = 400$, $\alpha = 0.01$ et $z_{1-\alpha/2} = 2.575$ l'intervalle de confiance est $I = [0.221, 0.287]$. L'hypothèse est acceptée car $0.26 \in I$.