CORRECTION MATH II
Session 2002

Partie I

2 1. (a) $v^m \in \operatorname{Ker}\varphi_u \iff v^m u = uv^m$. Le résultat est vrai pour $m=1$ puisque $v \in \operatorname{Ker}\varphi_u$. On suppose que $v^m \in \operatorname{Ker}\varphi_u$, alors $v^{m+1}u = vv^m u = vuv^m = uvv^m = uv^{m+1}$. Donc $v^{m+1}u = uv^{m+1}$, ce qui démontre le résultat.

---

2 (b) On suppose que $v \in \operatorname{Ker}\varphi_u$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $P(X) = \sum_{j=0}^{m} a_j X^j$, donc $P(v) = \sum_{j=0}^{m} a_j v^j$. Comme chaque $v^j \in \operatorname{Ker}\varphi_u$ et que $\operatorname{Ker}\varphi_u$ est un sous-espace vectoriel, alors $P(v) \in \operatorname{Ker}\varphi_u$.

---

1 2. $v \in \operatorname{Ker}\varphi_u \iff uv = vu \iff u \in \operatorname{Ker}\varphi_v$.

---

2 Si $v \in \operatorname{Ker}\varphi_u$, alors d'après ce qui précède pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(v) \in \operatorname{Ker}\varphi_u \Rightarrow u \in \operatorname{Ker}\varphi_{P(v)}$. Donc pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, $Q(u) \in \operatorname{Ker}\varphi_{P(v)} \Rightarrow P(v)Q(u) = Q(u)P(v)$.

1 Si $x \in \operatorname{Ker} Q(u)$, alors $Q(u)\Big(P(v)(x)\Big) = P(v)Q(u)(x) = 0$, ce qui prouve que $\operatorname{Ker} Q(u)$ est stable par $P(v)$.

---

1 3. Si $u^* = P(u)$, alors $u^*u = P(u)u = uP(u) = uu^*$. Donc u est normal.

---

1 4. (a) Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$. Comme u est normal, alors $u \in \operatorname{Ker}\varphi_{u^*}$, donc $P(u)Q(u^*) = Q(u^*)P(u)$.

1 Dans le cas où $Q = P$, ceci nous donne que $P(u)$ est un endomorphisme normal.

---

2 (b) Soit $x \in E$, alors $\|u^*(x)\|^2 = \langle u^*(x), u^*(x)\rangle = \langle x, uu^*(x)\rangle = \langle x, u^*u(x)\rangle = \|u(x)\|^2$.

---

1 $x \in \operatorname{Ker} u \iff \|u(x)\| = 0 \iff \|u^*(x)\| = 0 \iff x \in \operatorname{Ker} u^*$, donc $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^*$.

2 $x \in \operatorname{Ker} u^*u \Rightarrow \langle u^*u(x), x\rangle = \langle u(x), u(x)\rangle = 0 \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} u$. Il est évident que $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^*u$.

---

2 Montrons que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$. Il est évident que $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2$. Soit $x \in \operatorname{Ker} u^2$, alors $u(x) \in \operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^*$, donc $0 = \langle u^*u(x), x\rangle = \|u(x)\|^2$. Il en résulte que

2 $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$. On suppose que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^m$ pour un $m \geq 2$ et montrons que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^{m+1}$. Il suffit de montrer que $\operatorname{Ker} u^{m+1} \subset \operatorname{Ker} u$. Soit $x \in \operatorname{Ker} u^{m+1}$, alors $u^{m-1}(x) \in \operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$, donc $x \in \operatorname{Ker} u^m$.

---

2 (c) On a montré que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(u)$ est normal. Donc $\operatorname{Ker} P^m(u) =$
1 $\operatorname{Ker} P(u) = \operatorname{Ker} P(u^*)$.

---

2 (d) Si u est un endomorphisme normal nilpotent de E, alors $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^n = E$, donc u est l'endomorphisme nul.

Partie II

A)

1 1. Soit v un endomorphisme de E antisymétrique et soit $x \in E$. Alors $\langle v(x), x\rangle = \langle x, v^*(x)\rangle = -\langle x, v(x)\rangle = \langle v(x), x\rangle$. Donc $\langle v(x), x\rangle = 0$.

---

2 Inversement si pour tout $x \in E$, $\langle v(x), x\rangle = 0$, alors pour tous $x, y \in E$, $\langle v(x+y), x+y\rangle = 0$. Donc pour tous $x, y \in E$, $\langle (v + v^*)(x), y\rangle = 0$. Il en résulte que $v + v^* = 0$.

---

2. Soit v un endomorphisme antisymétrique non nul de E.

   (a) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est la matrice de v dans $\mathcal{B}$, alors ${}^tA$ est la matrice de v^* dans $\mathcal{B}$.

2 Comme ${}^tA = -A$, alors A est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & w \\ -w & 0 \end{pmatrix}$, avec $w \neq 0$, car v est non nul.

---

1 La matrice de v^2 est A^2, donc $v^2 = -w^2 \operatorname{Id}$.

   (b) Soit e un vecteur de E de norme 1.

2 Comme v n'admet pas de valeur propre réelle, alors $(e, \frac{1}{|w|}v(e))$ est un système libre. De plus $\langle e, \frac{1}{|w|}v(e)\rangle = 0$, d'après ce qui précède, donc $(e, \frac{1}{|w|}v(e))$ est une base
1 orthonormée de E. La matrice de v dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & -|w| \\ |w| & 0 \end{pmatrix}$.

Soit u un endomorphisme de E et $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ la matrice de u dans $\mathcal{B}$.

---

3. u est normal si, et seulement, si $A{}^tA = {}^tAA$. Or ${}^tAA = \begin{pmatrix} \alpha^2+\gamma^2 & \alpha\beta+\gamma\delta \\ \alpha\beta+\gamma\delta & \beta^2+\delta^2 \end{pmatrix}$ et

2 $A{}^tA = \begin{pmatrix} \alpha^2+\beta^2 & \alpha\gamma+\beta\delta \\ \alpha\gamma+\beta\delta & \gamma^2+\delta^2 \end{pmatrix}$. Donc $A{}^tA = {}^tAA$ est équivalent à $(\beta-\gamma)(\beta+\gamma)=0$ et $(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)=0$.

---

2 4. (a) Si $\beta=\gamma$, alors $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$. Donc A est symétrique, et comme la base est orthonormée, alors l'endomorphisme u est symétrique.

---

1 (b) Si $\beta \neq \gamma$, alors les équations précédentes donnent : $\gamma = -\beta \neq 0$ et $\alpha = \delta$. Le polynôme caractéristique de u est $P_u(X) = (X-\alpha)^2+\beta^2$. Comme $\beta\neq\gamma$, donc $\beta \neq 0$ et donc u n'admet pas de valeurs propres réelles. Il existe $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$ tels

1 que $\alpha + i\beta = re^{i\theta}$, et donc $A = r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

B)

Soit u un endomorphisme normal et soit P_u son polynôme caractéristique.

---

1. Si P_u est scindé sur $\mathbb{R}$, alors u admet au moins une valeur propre réelle α. Si e est un vecteur propre normé de u pour la valeur propre α et si e' est un vecteur orthogonal à

2 e normé, alors il existe β et γ deux réels tels que $u(e') = \beta e + \gamma e'$. Donc la matrice de u est de la forme $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$.

1 Comme u est normal et (e,e') est une base orthonormée, alors ${}^tAA = A{}^tA$, ce qui donne que $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$. Il en résulte que u est symétrique.

---

2. (a) On suppose que P_u n'admet pas de racines réelles. Comme P_u est un polynôme de

2 degré 2 et unitaire, alors $P_u(x) = (x-\alpha)^2+\beta^2$, avec (α,β) de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$. β ne peut pas être nul vu que le polynôme P_u n'est pas scindé. Le couple est unique.

2 Comme $P_u(0) = \det u = \beta^2 \neq 0$, donc u est inversible.

---

2 (b) Soit $x \in E\setminus\{0\}$, comme u est inversible, alors $u(x)\neq 0$. De plus $u(x)$ n'est pas colinéaire à x car u n'admet pas de valeurs propres réelles. Donc $(x,u(x))$ est une base de E.

2 Si $F\neq\{0\}$ est un sous-espace de E, stable par u, alors si $x\in F\setminus\{0\}$, le système $(x,u(x))$ est une base de E et c'est un système libre de F, donc $F=E$.

2 (c) L'endomorphisme $u + u^*$ est symétrique, donc il est même diagonalisable dans une base orthonormée.

---

1 (d) Soit λ une valeur propre de $u + u^*$. On pose $E_\lambda = \mathrm{Ker}(u + u^* - \lambda\,\mathrm{Id})$. Si $x \in E_\lambda$, alors $(u + u^* - \lambda\,\mathrm{Id})(u(x)) = (u^2 + u^*u - \lambda\,\mathrm{Id})(x) = u(u + u^* - \lambda\,\mathrm{Id})(x) = 0$. Donc E_λ est stable par u.

---

1 D'après ce qui précède $E_\lambda = E$. Donc $u + u^* = \lambda\,\mathrm{Id}$. Si $\lambda = 2\mu$, alors $u + u^* = 2\mu\,\mathrm{Id}$. $(u^* = -u + 2\mu\,\mathrm{Id}.)$

---

1 3. (a) $u - u^*$ est antisymétrique, donc d'après les résultats de la partie II) A), il existe $\gamma > 0$ tel que $(u - u^*)^2 = -4\gamma^2\,\mathrm{Id}$.

---

3 (b) D'après ce qui précède, il existe une base orthonormée (e, e') de E telle que dans la quelle la matrice de $u - u^*$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -2\gamma \\ 2\gamma & 0 \end{pmatrix}$. Comme $u + u^* = 2\mu\,\mathrm{Id}$ et c'est indépendant de la base. Comme $u = \frac{1}{2}((u + u^*) + (u - u^*))$, donc dans la base (e, e'), la matrice de u est $\begin{pmatrix} \mu & -\gamma \\ \gamma & \mu \end{pmatrix}$.

---

1 (c) Si $r = \sqrt{\mu^2 + \gamma^2} > 0$ et θ est l'argument du nombre complexe $\mu + i\gamma$, alors $\frac{1}{r}u$ est la rotation d'angle θ.

Partie III

1. Soient Q et R deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ premiers entre-eux.

1 (a) Si $x \in \mathrm{Ker}\,Q(u)$, alors $QR(u)(x) = RQ(u)(x) = 0$, donc $R(u)$ laisse stable $\mathrm{Ker}\,Q(u)$.
2 Soit $x \in \mathrm{Ker}\,Q(u) \cap \mathrm{Ker}\,R(u)$, alors d'après l'identité de Bezout il existe deux polynômes R_1 et Q_1 tels que $R_1R + Q_1Q = 1$, donc $(R_1R + Q_1Q)(u)(x) = x$. Comme $R_1R(u)(x) = 0$ et $(Q_1Q)(u)(x) = 0$, donc $x = 0$.

---

2 (b) Il résulte de la question précédente que $\dim R(u)(\mathrm{Ker}\,Q(u)) = \dim \mathrm{Ker}\,Q(u)$, donc $R(u)(\mathrm{Ker}\,Q(u)) = \mathrm{Ker}\,Q(u)$.

$(X) = (1-X)(X^2+1)$.

4

(c) Si u est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à la m
canonique.
Les deux polynômes $1-X$ et X^2+1 sont premiers e
donne $\frac{1}{2}(X^2+1)+\frac{1}{2}(X+1)(1-X)=1$. Si $Q_1(X)=$
alors d'après ce qui précède $p_1(u)=\frac{1}{2}(u^2+\mathrm{Id})$, $p_2(u)=$
et $u^*\circ p_2=-u\circ p_2$. Donc $u^*=\frac{1}{2}(u^3+u)+\frac{1}{2}(u^3-u)=$

4. (a) Dans le cas général soit $P_u(X)=\prod_{j=1}^{k} Q_j^{m_j}(X)$ la décomposit
ductibles dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme caractéristique P_u de l'endomo
Comme les endomorphismes $Q_j(u)$ sont normaux, alors $\operatorname{Ker} Q_j^{m_j}($
et par récurrence sur k, (les deux polynômes $\prod_{j=1}^{k-1} Q_j^{m_j}(X)$ et $Q_k^{m_k}(X)$
ntre eux.)

$$E=\overset{\perp}{\bigoplus_{1\le j\le k}}\operatorname{Ker} Q_j^{m_j}(u)=\overset{\perp}{\bigoplus_{1\le j\le k}}\operatorname{Ker} Q_j(u).$$

s-espaces $\operatorname{Ker} Q_j^{m_j}(u)$ sont orthogonaux deux à deux.

indé, alors les polynômes Q_j sont de degré 1 et donc les $\operatorname{Ker} Q_j(u)$ son
ropres de u. Donc u est diagonalisable dans une base orthonormée, ce
u est symétrique.

rojecteur orthogonal sur $\operatorname{Ker} Q_j(u)$. D'après l'identité de Bezout
en u et $u^*\circ p_j$ est un polynôme en u. Comme $u^*=\sum_{j=1}^{k} u^*\circ p_j$,
ôme en u.