REPUBLIQUE TUNISIENNE

***

Ministère de l'enseignement Supérieur

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session : Juin 2002

Concours en Mathématiques et Physique
Epreuve en Mathématiques I

Durée : 4 heures **Date : 3 Juin** **Heure : 8H** **Nb pages :5**
Barème : Partie I : 6 ; Partie II : 9 ; Partie III : 5

L'usage des calculatrices est strictement interdit.
Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation. Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le sujet peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Partie I.

Soient $\alpha > -1$ et $q \in \mathbb{N}$. On pose pour $x > 0$, $f(x) = e^{-x}x^{\alpha}(Logx)^q$.

1) Montrer que f est intégrable sur $]0, +\infty[$.

2) On pose pour $n \geq 1$

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{\alpha}(1 - \frac{x}{n})^n (Logx)^q, & \text{pour } 0 < x < n \\ 0, & \text{pour } x \geq n. \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $t < 1$, $Log(1-t) \leq -t$.

b) En déduire que $\forall\, n \geq 1, \forall\, x > 0, |f_n(x)| \leq |f(x)|$.

3) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)d$

4) On suppose que $\alpha = 0, q = 1$ et o

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \int_0$$

a) Montrer que $I_n = \frac{n}{n+1}Logn + n\int_0^1 u^n L$

b) Montrer que

$$\int_0^1 u^n Log(1-u)du = -\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p(p+n+1)} = -\frac{1}{n+1}\sum_{p=}$$

c) En déduire que $I_n = \frac{n}{n+1}(Logn - \sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p})$.

Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-x}Logx\,dx = \lim\limits_{n\to+\infty}(Logn - \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p})$.

nstante $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty}(\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} - Logn)$, est dite constante d'Euler.

ue la série de terme général $\left(\frac{1}{n} - Log(1+\frac{1}{n})\right)_{n\geq 1}$ est conver

$\sum_{=1}^{\infty}(\frac{1}{n} - Log(1+\frac{1}{n}))$.

$\geq 0, x - Log(1+x) = x^2\int_0^1\frac{t}{1+tx}dt$.

$\geq 1, (1-Log2)\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} - Log(1+\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{2n^2}$.

π^2, montrer que $(1-Log2)\frac{\pi^2}{6} \leq \gamma \leq \frac{\pi^2}{12}$.

Partie II.

On définit la fonction gamma $\Gamma :]0,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[$ par : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

Une fonction $g :]0,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[$ dérivable, est dite logarithmiquement convexe si sa dérivée logarithmique $\frac{g'}{g}$ est croissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

1) a) Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \forall\, x > 0$.

b) Montrer que Γ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ et que $\forall\, n \geq 0, \forall\, x > 0$,

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}(Logt)^n dt.$$

c) Que vaut $\Gamma'(1)$?

2) a) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz suivante

$$\left(\int_0^{+\infty} |u(t)v(t)|\, dt\right)^2 \leq \left(\int_0^{+\infty} u^2(t)dt\right)\left(\int_0^{+\infty} v^2(t)dt\right),$$

montrer que

$$(\Gamma'(x))^2 \leq \Gamma(x)\Gamma''(x), \ \forall x > 0.$$

b) En déduire que la fonction Γ est logarithmiquement convexe.

– Soit $g :]0,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[$ une fonction logarithmiquement convexe et vérifiant : $\forall x > 0, \ g(x+1) = xg(x)$ $(\star)$. On veut montrer que $g = g(1)\Gamma$.

3) a) Montrer que $\forall x > 0, \ \frac{g'(x+1)}{g(x+1)} = \frac{g'(x)}{g(x)} + \frac{1}{x}$.

b) Montrer que la fonction $h = \frac{g}{\Gamma}$ est périodique de période 1.

c) En déduire que h' est aussi périodique de période 1.

4) a) Montrer que si $n \leq x < n+1$, alors

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)} - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \leq \frac{h'(n)}{h(n)} + \frac{1}{n} = \frac{h'(1)}{h(1)} + \frac{1}{n}$$

b) Montrer de même que $\frac{h'(1)}{h(1)} - \frac{1}{n} \leq \frac{h'(x)}{h(x)}$.

c) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{h'(1)}{h(1)}$.

5) a) Montrer que $\frac{h'}{h}$ est constante puis que h est constante.

b) Montrer alors que $g(x) = g(1)\Gamma(x)$, $\forall x > 0$.

–On définit la fonction bêta par : $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$, $x, y > 0$.

6) a) Montrer que $B(x+1,y) = \frac{x}{y} B(x, y+1)$.

b) Vérifier que $B(x, y+1) + B(x+1, y) = B(x,y)$.

En déduire que $B(x+1,y) = \frac{x}{x+y} B(x,y)$.

7) a) Montrer que la fonction $x \mapsto B(x,y)\Gamma(x+y)$ est logarithmiquement convexe et vérifie $(\star)$.

b) En déduire que $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

c) Retrouver alors la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

8) a) Montrer que la fonction $x \mapsto 2^{x-1}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$ est logarithmiquement convexe et vérifie $(\star)$.

b) En déduire que $2^{x-1}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(x)$.

9) a) Montrer alors que $\int_0^1 Log\Gamma(t)\,dt = Log\sqrt{2\pi}$.

b) En déduire que $\int_x^{x+1} Log\Gamma(t)\,dt = xLogx - x + Log\sqrt{2\pi}$.

Partie III.

Soit $u(x) = (x-1)\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+x)}$, pour $x > 0$.

1) a) Vérifier que $u(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x} \right)$.

b) Montrer que la fonction $x \mapsto u(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $u'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$, $\forall x > 0$.

c) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} xu(x) = -1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} u'(x) = 0$.

2) a) Montrer que $\forall x > 0$, $u(x+1) = u(x) + \frac{1}{x}$.

b) Calculer $\int_1^2 u(t)dt$.

c) En déduire $\int_x^{x+1} u(t)dt$.

3) Montrer que $\forall x > 0$,

i) $\Gamma(x) = \exp\left(\int_1^x (u(t) - \gamma)\, dt \right)$.

ii) $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = u(x) - \gamma$.