(4) Concours M.P. (session : juin 2002) M. Macaref (a)

I		24/40
I.A.1	Il faut $\ell \gg a$ pour pouvoir négliger les effets de bord.	0,5
I.A.2	$\operatorname{div}\vec{B} = 0$; $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$ (forme locale) ARRS $\oiint_{S \text{ fermée}} \vec{B}\cdot\vec{dS} = 0$ (conservation de flux de $\vec{B}$) et $\oint_{(C)} \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I$ (Théorème d'Ampère)	0,5
I.A.3	• Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ P. sym $\Rightarrow \vec{B}$ (vecteur axial) $= \vec{B}_N = B(r,\theta,z)\,\vec{u}_z$. • La translation suivant z et la rotation d'un angle θ laissent le système invariant $\Rightarrow \vec{B} = B(r)\,\vec{u}_z$. (~~Pour le plan : $(M, \vec{u}_z, \vec{u}_r)$ P. d'antisy.~~)	0,5
I.A.4	• $r < a$ $\int_{C_1} \vec{B}\cdot\vec{dl} = B_0 h_1 - B_0 h_1 = 0 \Rightarrow \boxed{B = B_0}$ (B uniforme) • $r > a$ $\int_{C_2} \vec{B}\cdot\vec{dl} = B_0 h_2 - B h_1 = \mu_0 n i h_2 \Rightarrow \boxed{B = B_0 - \mu_0 n i}$	1
I.A.5	A l'infini ($r \to \infty$) $\Rightarrow B(r) = 0$ d'où $B_0 = \mu_0 n i$	1
I.A.6	$\phi = n\ell \iint_{\text{spire}} \vec{B}_0\cdot\vec{dS} = \mu_0 \pi n^2 \ell a^2 i = L i \Rightarrow \boxed{L = \mu_0 \pi n^2 \ell a^2}$	1
I.A.7	• $dI = i n\, dz = j_s\, dz$ d'où : $\vec{j_s} = j_s \vec{u}_\theta = (n i)\,\vec{u}_\theta$ et $\vec{B}_0 = \mu_0 j_s \vec{u}_z$ • $\vec{B}_2(\text{ext}) - \vec{B}_1(\text{int}) = \mu_0 \vec{j_s} \wedge \vec{n}_{12}$ ($\vec{n}_{12} = \vec{u}_r$) $0 - \vec{B}_0 = \mu_0 n i\, \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_r = -\mu_0 n i\, \vec{u}_z$.	1,5 1
I.B.1	Le courant variable $i(t)$ crée dans le conducteur un champ magnétique variable dans le temps ($\vec{B}_0(t)$). Ce champ $\vec{B}_0(t)$ induit un champ électromoteur $\vec{E}_1$ qui va dissiper de la chaleur par effet Joule ($dP = \vec{j}\cdot\vec{E}_1 = \gamma E_1^2$) et chauffe le conducteur.	0,5
I.B.2	$L \gg R$ (cylindre infini) : * translation suivant z et rotation d'un angle θ laissent le cylindre invariant $\Rightarrow \vec{E}(r)$. * Tout plan contenant l'axe Oz est d'antisymétrie pour la distribution de courant $\Rightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_N = E_\theta(r)\,\vec{u}_\theta$. * $M \in$ l'axe Oz ; $\pi_1(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ et $\pi_2(M, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ plans d'antisym. $\Rightarrow \vec{E}_1 \perp \pi_1$ et $\vec{E}_1 \perp \pi_2 \Rightarrow \vec{E}_1(r=0, t) = \vec{0}$.	1
I.B.3	$\overrightarrow{rot}\,\vec{E}_1 = -\dfrac{\partial \vec{B}_0(t)}{\partial t}$, soit : $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r E_\theta(r))\,\vec{u}_z = B_0 \omega \sin \omega t\, \vec{u}_z$ $\Rightarrow \vec{E}_1 = \dfrac{B_0 \omega r}{2} \sin \omega t\, \vec{u}_\theta$	1
I.B.4	$\vec{A}_0(M,t) = \frac{1}{2}(B_0 \cos \omega t)\,\vec{u}_z \wedge (r\,\vec{u}_r + z\,\vec{u}_z) = \frac{1}{2} B_0 r \cos \omega t\, \vec{u}_\theta$	1,5

$$\vec{E}_1 = -\frac{\partial A_\theta}{\partial t} = \frac{1}{2}\omega r B_0 \sin\omega t \, \vec{u}_\theta$$
$$\vec{j}_1 = \gamma \vec{E}_1$$

I.B.5	La puissance $dP(t)$ dissipée par effet Joule dans le volume $d\tau = 2\pi r\, dr\, L$: $dP = \vec{j}_1 . \vec{E}_1 \, d\tau = \frac{1}{4}\gamma r^2 \omega^2 B_0^2 \sin^2\omega t \cdot d\tau$ $P(t) = \frac{\pi}{8}\gamma\omega^2 B_0^2 L R^4 \sin^2\omega t \Rightarrow \langle P\rangle_t = \frac{\pi}{16}\gamma\omega^2 B_0^2 L R^4$
I.B.6	$\langle P\rangle_t$ est fonction de $\omega^2 \Rightarrow$ il faut utiliser une fréquence élevée
I.B.7. a)	$\vec{rot}(\vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_1$ cylindre infini : . le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ P. Sym . Invariance par translation et rotation $\} \Rightarrow \vec{B}_1 = \vec{B}_N = B_1(r)\vec{u}_z$
I.B.7. b)	$-\frac{\partial}{\partial r}(B_{1z})\,\vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 \gamma B_0 \omega r}{2} \sin\omega t \, \vec{u}_\theta$ soit : $\vec{B}_1(r,t) = \frac{\mu_0\gamma\omega}{4} B_0 (R^2 - r^2)\sin\omega t \, \vec{u}_z$
I.B.7. c)	Le rapport : $\frac{\lVert \vec{B}_1(r=0,t)\rVert}{\lVert \vec{B}_0 \rVert} = \frac{\mu_0\gamma\omega}{4} R^2 < \frac{1}{10}$, soit : $R < \sqrt{\frac{2}{5\mu_0\gamma\omega}}$ $\Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} < \frac{1}{5\pi\mu_0\gamma R^2}$ soit : $f < f_M = 11$ Hz.

. Elle est insuffisante au 1er ordre.
. On peut appliquer la méthode des ajustements succesifs en s'arrêtant à l'ordre n le plus élevé possible :

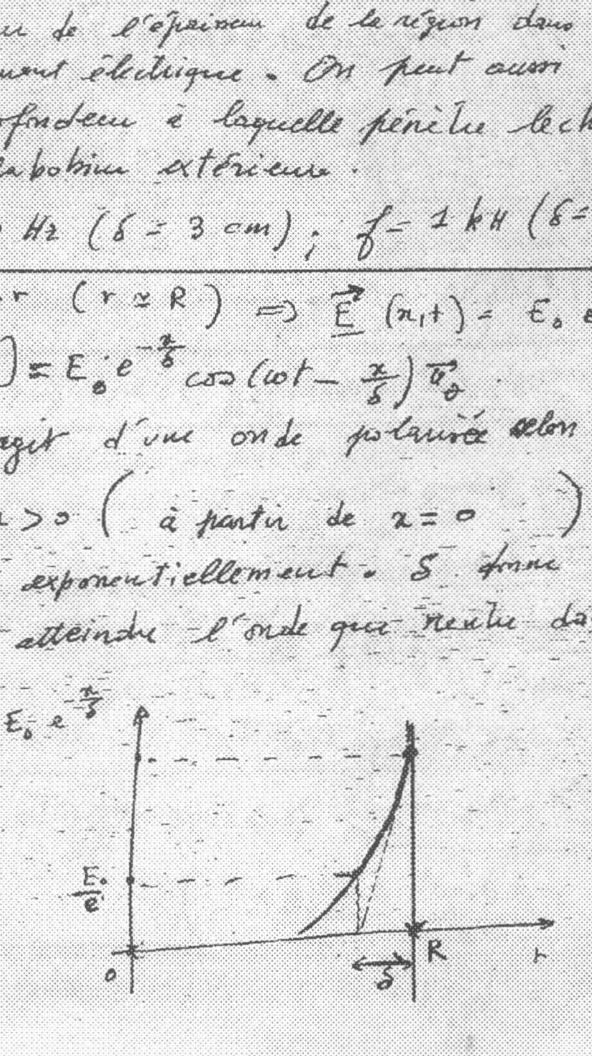
$$\frac{1}{\mu_0}\vec{rot}(\vec{B}_n) = \vec{j}_n \quad \text{et} \quad \vec{rot}\left(\frac{\vec{j}_{n+1}}{\gamma}\right) + \frac{\partial \vec{B}_n}{\partial t} = 0.$$

Il faut ainsi sommer une infinité de termes du champ pour reconstituer le champ total :

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1 + \dots \vec{B}_{n-1}$$
$$\vec{j} = \vec{j}_1 + \dots$$

I.C.1	$\varepsilon_0\omega \ll \gamma \Rightarrow f \ll \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0}$ soit $f \ll 10^{18}$ Hz. cette approximation reste toujours valable (ARQS).	1
I.C.2	. $div \vec{E} = 0$; $div\vec{B} = 0$; $\vec{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$; $\vec{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} = \mu_0\gamma\vec{E}$. $\vec{rot}(\vec{rot}\vec{E}) = \vec{grad}(div\vec{E}) - \vec{\Delta}.\vec{E} \Rightarrow \vec{\Delta}(\vec{E}) - \mu_0\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0$ Nous obtenons exactement la même équation pour $\vec{B}$ et $\vec{j}$.	1

② ③

I.C.3	La relation (5) entraine que : $\vec{\Delta}(\underline{\vec{E}}) = -\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\,\underline{\vec{E}})$; avec : $\underline{\vec{E}} = \underbrace{\underline{E}(r)e^{i\omega t}}_{\underline{E}_\theta(r,t)}\,\vec{u}_\theta$. $\vec{\Delta}(\underline{\vec{E}}) = -\overrightarrow{rot}\cdot\left[\underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r E_\theta(r))}_{E_3}\vec{u}_3\right] = \left(\frac{\partial}{\partial r}\left[\underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r E_\theta)}_{E_3}\right]\right)\vec{u}_\theta$ $= \left[\frac{d^2E_\theta(r,t)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dE_\theta(r,t)}{dr} - \frac{1}{r^2}E_\theta(r)\right]\vec{u}_\theta = \left(\left[\Delta - \frac{1}{r^2}\right]\underline{E}(r)e^{i\omega t}\right)\cdot\vec{u}_\theta$ avec : $\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}$	2
I.C.4	$\frac{d^2}{dr^2}\underline{E}(r) + \frac{1}{r}\frac{d\underline{E}(r)}{dr} - \frac{1}{r^2}\underline{E}(r) - \frac{2i}{\delta^2}\underline{E}(r) = 0$. $\underline{E}(r) = E_0\, e^{-\left[\frac{1+i}{\delta}(R-r)\right]}$ avec $r \gg \delta$ $\left(\frac{1+i}{\delta}\right)^2 + \frac{1+i}{r\delta} - \frac{1}{r^2} = \frac{2i}{\delta^2} \Rightarrow \left(\frac{1+i}{\delta}\right)^2 = \frac{2i}{\delta^2}$ pour : $r^2 \gg r\delta \gg \delta^2$ (la solution convient).	2
I.C.5	La quantité δ homogène à une longueur est appelée « épaisseur de peau » car elle caractérise l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la région dans laquelle circule un courant électrique. On peut aussi dire qu'elle caractérise la profondeur à laquelle pénètre le champ magnétique créé par la bobine extérieure. $f = 50$ Hz ($\delta = 3$ cm) ; $f = 1$ kHz ($\delta = 7$ mm) ; $f = 100$ kHz (0,7 mm)	1,5
I.C.6	$x = R - r$ ($r \simeq R$) $\Rightarrow \underline{\vec{E}}(x,t) = E_0\, e^{-\frac{(1+i)}{\delta}x}\cdot e^{i\omega t}\cdot\vec{u}_\theta$ $Re[\underline{\vec{E}}] = E_0 e^{-\frac{x}{\delta}}\cos(\omega t - \frac{x}{\delta})\,\vec{u}_\theta$. Il s'agit d'une onde polarisée selon $\vec{u}_\theta$ qui se propage vers $x > 0$ (à partir de $x = 0$) pendant que l'amplitude décroît exponentiellement. δ donne la profondeur que peut atteindre l'onde qui rentre dans le conducteur. 	2

0,5

I.C.7 En augmentant f, δ devient petit $\Rightarrow$ on limite la zone du chauffage. Pour $f = 50\,Hz$: $(\delta = R)$ on chauffe pratiquement le cylindre uniformément : $\left(\frac{2}{\mu_0 \gamma f 2\pi} = R^2\right)$.

II 8/

II.1
* $\vec{j}_{th} = -\lambda\, \overrightarrow{grad}\, T$; $[\lambda] = W \cdot m^{-1}\, K^{-1}$ 0,5 | 0,25 1
* $\vec{j}_{th} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \vec{u}_r$ 0,5

II.2 $\phi_{th} = 2\pi h r j_{th}$; $\phi_{th}(r)$ entrant et $\phi_{th}(r+dr)$ sortant : 0,5

$$d\phi_{th} = 2\pi h \left[j_{th}(r) \cdot r - j_{th}(r+dr) \cdot (r+dr) \right]$$ 1,5

$$= -2\pi h \frac{\partial}{\partial r}(r\, j_{th})\, dr.$$ 1

II.3 $$\langle dP \rangle_t = \frac{\gamma B_0^2 \omega^2}{8} r^2\, 2\pi r h\, dr = \pi \frac{h \gamma \omega^2 B_0^2}{4} r^3 dr$$ 1

II.4 D'après le 1er principe : $dU = \rho 2\pi r h dr\, c\, dT = d\phi_{th}\, dt + \langle dP \rangle_t \cdot dt$

En régime permanent :

$$0 = -2\pi h \frac{d}{dr}(r\, j_{th})\, dr + \frac{\pi h \gamma \omega^2 B_0^2}{4} r^3 dr$$ 2

soit : $$\frac{d}{dr}(r\, j_{th}) = \frac{\gamma B_0^2 \omega^2}{8} r^3.$$

II.5 $$r\, j_{th} = -\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\gamma B_0^2 \omega^2}{32} r^4 + A$$

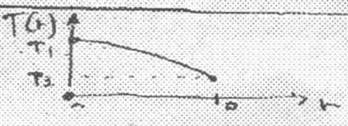
$$\Rightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{\gamma B_0^2 \omega^2}{32 \lambda} r^3 - \frac{A}{\lambda r}$$

$$T(r) = -\frac{\gamma B_0^2 \omega^2}{128 \lambda} r^4 - \frac{A}{\lambda} \ln r + B$$ 2

$T(r=0) = T_1 \Rightarrow A = 0$ et $B = T_1$

$$\boxed{T(r) = -\frac{\gamma B_0^2 \omega^2}{128 \lambda} r^4 + T_1}$$ avec : $T(r=R) = T_2$.

ou : $$T(r) = T_2 + \frac{\gamma B_0^2 \omega^2}{128 \lambda} \left(R^4 - r^4 \right).$$

II.6 

0,5

III 8/40

III.1 * a_0 correspond à la valeur moyenne du signal $u(t)$. (0,5)

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\cdot dt = 0 .$$ 1,5

* A partir de la figure 3, $u(t)$ est une fonction impaire donc $\sum_n b_n \cos n\omega t = 0$ d'où : $b_n = 0$ (1)

III.2 * $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\sin(n\omega t)\,dt = \frac{2E}{T}\left[\int_0^{T/2}\sin(n\omega t)\,dt - \int_{T/2}^{T}\sin(n\omega t)\,dt\right]$ 1,25

$= \frac{4E}{n\omega T}\left(1 - \cos(n\pi)\right) = \frac{2E}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$. 2

* $n = 1$: $a_1 = \frac{4E}{\pi}$; $n = 2$: $a_2 = 0$; $n = 3$: $a_3 = \frac{4E}{3\pi}$. (0,25) x 3

III.3 $\underline{u_n} = \left(R + i\left(L(n\omega) - \frac{1}{C(n\omega)}\right)\right)\underline{i_n} = \underline{Z_n}\cdot\underline{i_n}$

$|Z_1| = Z_1 = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$; $Z_3 = \sqrt{R^2 + \left(L3\omega - \frac{1}{C3\omega}\right)^2}$ (0,5)

$I_1 = \frac{U_{1eff}}{Z_1} = \frac{u_1/\sqrt{2}}{Z_1} = \frac{4E}{\pi\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{Z_1} = \frac{2\sqrt{2}E}{\pi\left[R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2\right]^{1/2}}$. (1) 3,5

$I_3 = \frac{U_{3eff}}{Z_3} = \frac{u_3/\sqrt{2}}{Z_3} = \frac{4E}{3\pi\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{Z_3} = \frac{2\sqrt{2}E}{3\pi\left[R^2 + \left(L3\omega - \frac{1}{C3\omega}\right)^2\right]^{1/2}}$. (1)

<u>A.N.</u> : $I_1 = 576\ A$ ($Z_1 = 947\ \Omega$) ; $I_3 = 48\ A$ ($Z_3 = 1{,}85\ \Omega$). (1)

III.4 Z_n augmente si n croît, les amplitudes des composantes de $i(t)$ de rang supérieur à 1 sont négligeables : $i(t)$ peut être considéré comme sinusoïdale. 1