



Concours en Mathématiques et Physique
Epreuve de physique

Date : Jeudi 06 juin 2002 Heure : 8 H Durée : 4 H Nb pages : 5
Barème : I : 12 / 20 (I.A : 3, I.B : 4, I.C : 5) ; II : 4 / 20 ; III : 4 / 20

L'usage d'une calculatrice (non-programmable) est autorisé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce problème propose une étude des phénomènes impliqués dans le chauffage d'un alliage d'aluminium. Il comporte trois parties indépendantes quoique reliées entre elles par le même phénomène : "l'induction électromagnétique". Le chauffage sans déformation par induction est très répandu en métallurgie. Il permet de transférer une énergie électrique à une masse métallique dans laquelle l'énergie dissipée par effet Joule est transformée en chaleur. L'avantage de ce procédé est de permettre le transfert de l'énergie produite, sans contact, par un champ magnétique variable dans le temps directement à l'intérieur du métal.

Données :

On utilise dans tout le problème la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ relative aux coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Les relations suivantes seront utiles pour la résolution :

$$\vec{F}(M) = F_r \vec{u}_r + F_\theta \vec{u}_\theta + F_z \vec{u}_z, \text{ où } F_i = F_i(r, \theta, z) \quad i = r, \theta, z. \quad (1)$$

$$\vec{\text{grad}} F = \frac{\partial F}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{u}_z, \text{ où } F \text{ est un champ scalaire.} \quad (2)$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{F} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z \quad (3)$$

* Dans le cas particulier d'un champ scalaire à symétrie cylindrique, le laplacien se réduit à :

$$\Delta F(r) = \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} \quad (4)$$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{F}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{F}) - \vec{\Delta}(\vec{F}), \text{ où } \vec{\Delta} \text{ est l'opérateur laplacien vectoriel.} \quad (5)$$

I/ Chauffage du métal par induction

Tous les phénomènes électromagnétiques envisagés ici seront traités dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS).

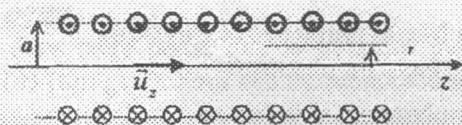
I.A / Etude préliminaire:

Le but de cette partie du problème est de calculer dans le vide le champ magnétique $\vec{B}_0(M, t)$ créé par l'inducteur formé d'un solénoïde circulaire de rayon a , d'axe Oz et de longueur l très grande par rapport à a (figure 1). On adopte, pour cette bobine, le modèle d'un solénoïde

illimité formé de n spires jointives par unité de longueur parcourues par le courant sinusoïdal d'intensité $i(t) = i_0 \cos(\omega t)$, avec une fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$.

Fig 1 :

Coupe longitudinale du solénoïde



Le vide est caractérisé par les constantes $\epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ F.m}^{-1}$ et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$.

I.A.1) Donner la condition sur a et l validant le modèle adopté pour la bobine.

I.A.2) Quelles sont les deux équations locales satisfaites par le champ magnétique $\vec{B}_0(M,t)$.

Donner leurs formes intégrales et commenter.

I.A.3) Par des considérations de symétrie, donner la direction de $\vec{B}_0(M,t)$. Montrer également que le module de \vec{B}_0 ne dépend pas de θ et de z .

I.A.4) En appliquant le théorème d'Ampère, déduire l'expression du champ $\vec{B}_0(M,t)$ en fonction de $\vec{B}_0(r=0,t)$ et des données du problème, pour : $r < a$ et $r > a$.

I.A.5) Sachant que le champ magnétique à une distance infinie de l'axe Oz est nul, montrer que le champ $\vec{B}_0(r,t)$ à l'intérieur du solénoïde s'écrit :

$$\vec{B}_0(r,t) = B_0 \cos \omega t \vec{u}_z;$$

Donner l'expression de B_0 en fonction des données du problème.

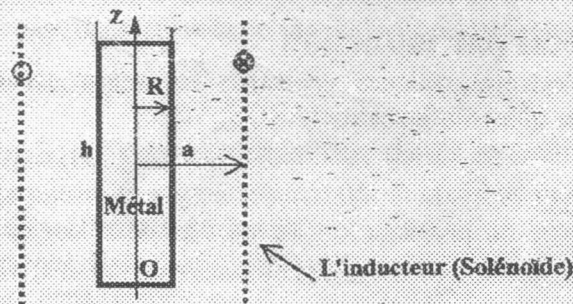
I.A.6) Déterminer l'expression de l'inductance propre L de cette bobine.

I.A.7) En assimilant le solénoïde précédent à une nappe cylindrique de courants de densité surfacique $\vec{j}_S = j_S \vec{u}_\theta$, donner l'expression de \vec{B}_0 en fonction de j_S et vérifier qu'elle obéit aux conditions aux limites.

I.B / Four à induction

On place à l'intérieur du solénoïde étudié dans I.A un creuset qui contient un alliage à chauffer de forme cylindrique d'axe Oz, de rayon $R = 3 \text{ cm}$ et de longueur h très grande par rapport à R (figure 2). Cet alliage est considéré comme un conducteur électriquement neutre, caractérisé par les constantes du vide ϵ_0, μ_0 et par sa conductivité $\gamma = 5 \cdot 10^6 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$.

Fig 2:



*** Courants induits dans l'approximation d'un champ uniforme :**

Dans cette partie, on suppose que le courant variable $i(t)$ du solénoïde crée dans le conducteur un champ magnétique uniforme : $\vec{B}_0(t) = B_0 \cos \omega t \vec{u}_z$ (partie I.A).

Ce champ \vec{B}_0 induit dans ce cylindre métallique un champ électrique $\vec{E}_1(M,t)$ et un courant volumique $\vec{j}_1(M,t)$. En première approximation on considère que le champ magnétique \vec{B}_1 créé par \vec{j}_1 est négligeable devant le champ inducteur $\vec{B}_0(t)$. Cette méthode de détermination du champ magnétique total dans le conducteur ($\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1, \dots$) s'appelle méthode des approximations successives en s'arrêtant à l'ordre le plus bas.

I.B.1) Décrire le phénomène qui permet de faire fondre éventuellement le métal.

I.B.2) En négligeant les effets de bord, montrer par des arguments de symétrie que le champ induit $\vec{E}_1(M,t)$ dans le métal ne dépend que de la variable spatiale r . Dédire que ce champ est orthoradial (c'est à dire porté par \vec{u}_θ) et que $\vec{E}_1(r=0,t) = \vec{0}$.

I.B.3) En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday, calculer le champ électrique $\vec{E}_1(r,t)$.

I.B.4) Retrouver l'expression de $\vec{E}_1(r,t)$ à partir du potentiel vecteur $\vec{A}_0(M,t)$ associé au champ uniforme $\vec{B}_0(t)$ par la relation :

$$\vec{A}_0(M,t) = \frac{1}{2} \vec{B}_0(t) \wedge \overrightarrow{OM}$$

A partir de la loi d'Ohm locale déduire l'expression du vecteur densité de courant \vec{j}_1 . Ce courant induit est appelé courant de Foucault.

I.B.5) Déterminer la puissance moyenne $\langle P \rangle$, dissipée par effet Joule à l'intérieur du métal.

I.B.6) Pour améliorer l'efficacité du chauffage vaut-il mieux utiliser un courant d'alimentation $i(t)$ de fréquence faible ou de fréquence élevée.

*** Limite de validité de l'approximation :**

Dans tout ce qui suit, on continuera à appliquer à l'alliage considéré, même pour des fréquences élevées :

- la loi d'Ohm du régime continu avec la conductivité γ donnée précédemment.

- les équations de Maxwell en régime quasi-stationnaire (ARQS). En particulier, dans l'équation de Maxwell-Ampère, on négligera le courant de déplacement vis à vis du courant de conduction.

I.B.7) On se place maintenant dans le cas où le champ magnétique \vec{B}_1 , qui se superpose à \vec{B}_0 , n'est plus négligeable lorsque la fréquence devient assez élevée.

a) En négligeant tout effet de bord montrer, par des considérations de symétrie, que $\vec{B}_1(M,t)$ est de la forme : $\vec{B}_1(M,t) = B_1(r,t) \vec{u}_z$.

b) Calculer $\vec{B}_1(r,t)$ en admettant que $\vec{B}_1(r=R,t) = \vec{0}$.

c) A quelle condition le champ $\vec{B}_1(r=0,t)$ est-il négligeable devant \vec{B}_0 ? (On prendra

$\|\vec{B}_1(r=0,t)\| < \frac{\|\vec{B}_0\|}{10}$). A partir de quelle fréquence f_M peut-on dire que cette approximation n'est

plus valable ? Conclure sur l'ordre du développement en série des champs dans la méthode des approximations successives quand la fréquence devient assez élevée.

I.C/ Épaisseur de peau

On considère dans cette partie que le cylindre métallique est toujours dans le four à induction décrit dans I.B (figure 2). Pour des fréquences assez élevées, le chauffage par induction se fait seulement dans les couches superficielles du conducteur. La méthode des approximations développée dans I.B.7 ne permet pas d'expliquer ce phénomène qui a été étudié et mis en évidence pour la première fois par le physicien W. Thomson.

On se propose dans cette partie de déterminer le champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) dans ce conducteur en résolvant globalement les équations de Maxwell.

En utilisant la notation complexe, le champ électrique \vec{E} au point M du métal à la distance r de l'axe Oz est de la forme :

$$\vec{E}(M, t) = \underline{E}(r) e^{i\omega t} \vec{u}_\theta ; \text{ avec } i^2 = -1 \text{ et } \underline{E}(r) \text{ est l'amplitude complexe de } \vec{E}.$$

I.C.1) Pour des fréquences de l'ordre de 100 kHz, vérifier que le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ (où γ est la conductivité du régime continu). Jusqu'à quelle fréquence limite cette approximation reste-t-elle valable ?

I.C.2) Ecrire les équations de Maxwell dans ce conducteur globalement neutre. En déduire une équation différentielle satisfaite par $\underline{E}, \underline{B}$ et \underline{j} .

I.C.3) A partir des formules (3) et (5) (page 1), déterminer l'expression du laplacien vectoriel $\Delta(\vec{E})$. En déduire que $\underline{E}(r)$ vérifie l'équation :

$$\left[\Delta - \frac{1}{r^2} \right] \underline{E}(r) = i \mu_0 \gamma \omega \underline{E}(r) \quad (6)$$

I.C.4) En introduisant la quantité $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$, vérifier que $\underline{E}(r) = E_0 e^{\left[-\frac{1+i}{\delta} (R-r) \right]}$ est une solution approchée de l'équation (6) au voisinage de la périphérie du métal (c'est à dire pour $r \gg \delta$).

I.C.5) Donner les valeurs numériques de δ pour l'aluminium pour des fréquences égales à 50 Hz, 1 kHz et 100 kHz. Justifier l'appellation retenue pour δ : "épaisseur de peau" ou "profondeur de pénétration".

I.C.6) En posant $x = R - r$ dans la solution proposée dans la question I.C.4, donner l'expression réelle de $\vec{E}(x, t)$. Interpréter le phénomène observé et représenter l'allure de l'évolution de l'amplitude de \vec{E} en fonction de x au voisinage de la périphérie du métal.

I.C.7) Pour optimiser le chauffage en volume par induction, expliquer pourquoi on choisit en pratique une fréquence de l'ordre de $\frac{1}{\pi \mu_0 \gamma R^2}$.

II/ Transfert thermique par conduction dans le métal

On cherche à déterminer, en régime permanent, le profil de température à l'intérieur du cylindre métallique chauffé par induction (figure 2).

En se plaçant à une fréquence assez faible, la puissance volumique moyenne dissipée par effet Joule dans le métal plongé dans l'inducteur s'écrit sous la forme :

$$\left\langle \frac{dP}{d\tau} \right\rangle_t = \frac{\gamma B_0^2 \omega^2}{8} r^2$$

En négligeant tout effet de bord ($h \gg R$), on suppose que la température à l'intérieur du métal n'est fonction que de r en régime permanent, avec $T(r=0) = T_1$, $T(r=R) = T_2$ et $T_2 < T_1$.

On désigne respectivement par λ , c et ρ la conductivité thermique, la capacité thermique massique et la masse volumique du métal. Ces grandeurs sont supposées indépendantes de la température.

II.1) Énoncer la loi de Fourier et préciser l'unité de la conductivité thermique. En déduire l'expression du vecteur densité de courants thermiques \vec{j}_{th} dans ce cylindre.

II.2) Calculer le flux thermique ϕ_{th} à travers une surface cylindrique de rayon r et de longueur h . Montrer que la variation $d\phi_{th}$ du flux thermique à travers une tranche du cylindre comprise entre r et $r+dr$ s'écrit :

$$d\phi_{th} = -2\pi h \frac{\partial(r j_{th})}{\partial r} dr$$

II.3) Déterminer la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le volume du métal compris entre r et $r+dr$.

II.4) En appliquant le premier principe de la thermodynamique, établir en régime permanent, le bilan thermique sur la tranche du cylindre métallique comprise entre r et $r+dr$. On supposera que l'énergie dissipée par effet Joule est l'unique apport d'énergie autre que celui lié à la conduction thermique.

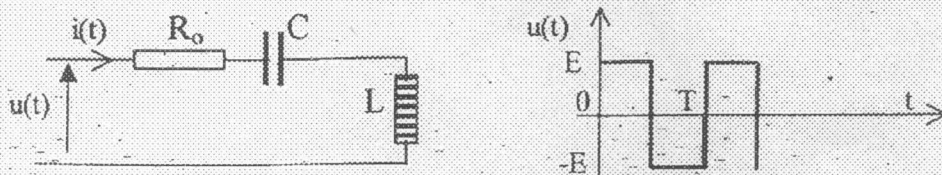
II.5) En déduire la température $T(r)$ en tout point M du métal.

II.6) Représenter l'allure de l'évolution de $T(r)$ en fonction de r .

III/ Etude de l'alimentation de l'inducteur

L'inducteur d'intensité $i(t)$, décrit dans la partie I, est équivalent à un circuit série composé d'une inductance $L = 10^{-5}$ H, d'une résistance $R_0 = 0,01 \Omega$ et d'une capacité $C = 10^{-4}$ F (figure 3).

Fig 3:



On suppose que la tension $u(t)$ appliquée à ce circuit est un signal carré alternatif, de fréquence $f = 10$ kHz et d'amplitude $E = 300$ V. Sa décomposition en série de Fourier s'écrit :

$$u(t) = a_0 + a_1 \sin(\omega t) + b_1 \cos(\omega t) + \dots + a_n \sin(n\omega t) + b_n \cos(n\omega t).$$

III.1) Quelle est la valeur de a_0 et celles des coefficients b_n ?

III.2) On donne : $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin(n\omega t) dt$; montrer que : $a_n = \frac{2E}{n\pi} [1 - (-1)^n]$ pour $n \neq 0$.

En déduire les amplitudes du fondamental ($n=1$) et des harmoniques ($n=2$) et ($n=3$).

III.3) En Calculant les modules des impédances Z_1 et Z_3 relatives aux harmoniques 1 et 3, déduire les valeurs efficaces I_1 et I_3 des intensités de courants correspondants.

III.4) Peut-on considérer que $i(t)$ est sinusoïdale ?

Fin de l'énoncé